第 2 種楕円積分についての考察 (Consideration about type 2 elliptic integral)			作成 2015/12/23 ニューラルソフト有限会社 市来 博記
初版	−	2015/12/23	

第 2 種楕円積分

楕円上の点(x, y)は Y 軸からの角度を用いて次の式で表すことができる。

$$x = a\ sin\ \varphi,\quad y = b\ cos\ \varphi$$

又、よく知られた式として

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

がある。弧の長さ s の微分（線素）は

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (曲線を微小な区間で考えると直線とみなせる。)

$$x = a\ sin\ \varphi = a\ cos\ \varphi\ d\varphi,\quad y = b\ cos\ \varphi =\ b - sin\ \varphi\ d\varphi$$

$ds = \sqrt{a^2\ cos^2\ \varphi + b^2\ sin^2\ \varphi}\ d\varphi$ $\qquad sin^2\ \varphi +\ cos^2\ \varphi = 1$ より

$$= \sqrt{a^2(1 -\ sin^2\ \varphi) + b^2\ sin^2\ \varphi}\ d\varphi$$

$$= \sqrt{a^2 - a^2\ sin^2\ \varphi + b^2\ sin^2\ \varphi}\ d\varphi$$

$= \sqrt{a^2 - (a^2 + b^2)\ sin^2\ \varphi}\ d\varphi$ $\qquad$ ルートの中の分母と分子にa^2を掛けて

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2(a^2 + b^2)}{a^2} sin^2\ \varphi\ d\varphi}$$

$$= \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{a^2 + b^2}{a^2} sin^2\ \varphi\right)}\ d\varphi$$

$$= a \sqrt{1 - \frac{a^2 + b^2}{a^2} sin^2\ \varphi\ d\varphi}$$

ここで、$k = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$ と置くと $\qquad$ kは離心率

$ds = \sqrt{1 - k^2\ sin^2\ \varphi}\ d\varphi$ となり、

Y 軸上の点から点(x, y)までの弧長 s は

$s = a\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}\, d\varphi$ *となる。*

ここで現れた積分はkをパラメーター(母数)とする不定積分で、積分の下限は 0，上限は φ である。これを第２種不完全楕円積分と言い、$\mathrm{E}(\varphi, k)$で表す。すなわち

$$\mathrm{E}(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\varphi} (1 - k^2 sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\, d\varphi$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$までの積分を第２種完全積分と言い、$\mathrm{E}(k)$で表す。$\mathrm{E}(k) = \mathrm{E}\left(\frac{\varphi}{2}, k\right)$、すなわち

$$\mathrm{E}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$\mathbf{E}(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{k})$の冪級数展開（テイラー展開）

冪級数展開の型

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$(1 - m\, sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}$の冪級数展開　　　　　　　　　　*$sin^2\theta$をxと置くと*

$f(x) \quad = (1 - m\, x)^{\frac{1}{2}}$

$f(0) \quad =1$

$f'(0) \quad = \frac{1}{2}(1 - m\, x)^{-\frac{1}{2}}(1 - m\, x)' = -\frac{m}{2}(1 - m\, x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-m}{2\sqrt{1 - m\, x}} = -\frac{m}{2}$

$f''(0) \quad = \left(-\frac{m}{2}(1 - m\, x)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{m}{2}\frac{1}{2}(1 - m\, x)^{-\frac{3}{2}}(1 - m\, x)' = -\frac{m^2}{4}(1 - m\, x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{m^2}{4}$

$f^{(3)}(0) = \left(-\frac{m^2}{4}(1 - m\, x)^{-\frac{3}{2}}\right)' = \frac{m^2}{4}\frac{3}{2}(1 - m\, x)^{-\frac{5}{2}}(1 - m\, x)' = -\frac{3m^3}{8}(1 - m\, x)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3m^3}{8}$

$f^{(4)}(0) = \left(-\frac{3m^2}{8}(1 - m\, x)^{-\frac{5}{2}}\right)' = \frac{3m^3}{8}\frac{5}{2}(1 - m\, x)^{-\frac{7}{2}}(1 - m\, x)' = -\frac{15m^4}{16}(1 - m\, x)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15m^4}{16}$

・
・
・

$f^{(n)} \quad = f^{(n-1)}\, \frac{2(n-1) - 1}{2}\mathrm{m}$　　　　　　　　$\mathrm{n} \geq 1$

$$(1-m\,sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}m\,sin^2\theta-\frac{1}{8}m^2\,sin^4\theta-\frac{3}{48}m^3\,sin^6\theta-\frac{15}{384}m^4\,sin^6\theta\ \cdots$$
$$= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{m^n}{2n-1}\,sin^{2n}\theta$$

この級数は m < 1 の範囲で収束するので、和と積分の順序を替えることができる。

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\varphi}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{k^{2n}}{2n-1}\,sin^{2n}\varphi\right\}d\varphi$$
$$= \int_0^{\varphi}d\varphi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{k^{2n}}{2n-1}\int_0^{\varphi}sin^{2n}\varphi\,d\varphi$$
$$= \varphi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{k^{2n}}{2n-1}\int_0^{\varphi}sin^{2n}\varphi\,d\varphi\cdots(1)$$

$\int_0^{\varphi}sin^{2n}\varphi\,d\varphi$ は次に示す漸化式で表すことができる。

$$I_N = \int_0^{\theta}sin^N\theta\,d\theta = \int_0^{\theta}sin\theta\,sin^{N-1}\theta\,d\theta = \int_0^{\theta}(-cos\theta)'\,sin^{N-1}\theta\,d\theta$$ 部分積部すると

$$= -cos\theta\,sin^{N-1}\theta-\int_0^{\theta}-cos\theta\,(sin^{N-1}\theta)'\,d\theta$$

$$= -cos\theta\,sin^{N-1}\theta+\int_0^{\theta}-cos\theta\,(N-1)\,sin^{N-2}\theta\,cos\theta\,d\theta$$

$$= -cos\theta\,sin^{N-1}\theta+(N-1)\int_0^{\theta}sin^{N-2}\theta\,cos^2\theta\,d\theta$$ $sin^2\theta+cos^2\theta=1$

$$= -cos\theta\,sin^{N-1}\theta+(N-1)\int_0^{\theta}sin^{N-2}\theta\,(1-sin^2\theta\,)\,d\theta$$

$$= -cos\theta\,sin^{N-1}\theta+(N-1)\int_0^{\theta}sin^{N-2}\theta-sin^N\theta\,d\theta$$

$$= -cos\theta\,sin^{N-1}\theta+(N-1)(I_{N-2}-I_N)$$
$$= -cos\theta\,sin^{N-1}\theta+(N-1)I_{N-2}-N\cdot I_N+I_N$$

$\therefore N\cdot I_N = -cos\theta\,sin^{N-1}\theta+(N-1)I_{N-2}$ ⇨ $I_N = \dfrac{-cos\theta\,sin^{N-1}\theta+(N-1)I_{N-2}}{N}$

(1)の式にI_Nを代入して

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2sin^2\varphi}\,d\varphi = \varphi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{k^{2n}}{2n-1}\frac{-cos\theta\,sin^{2n-1}\theta+(2n-1)I_{2n-2}}{2n}$$

となる。

第2種不完全楕円積分 $E(\varphi, k)$を求めるサンプル プログラム（C++）

```
//	第２種不完全楕円積分（冪級数版）
double ellipticIntegral2(double phi, double e, double tolerance = 1.0e-15);

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
//
//	機能		:	第２種不完全楕円積分
//	戻り値		:	積分値（楕円弧長）
//	備考		:	φはＹ軸からの角度（ラジアン）
//			:	0.0 ≦φ≦π/2
//			:	0.0≦離心率≦1.0 でない場合は NAN
//			:	1.0-tolerance≦離心率≦1.0 の場合は sinφ
//			:	離心率<tolerance の場合はφ
//

double ellipticIntegral2(double phi, double k, double tolerance)
{
	if ((k < 0.0) || (k > 1.0)) return NAN;
	if (k < tolerance) return phi;
	if (k > 1.0 - tolerance) return Sin(phi);

	double n = 2.0, e = 0.0, a = 1.0, sn = phi;
	double c = cos(phi), s = sin(phi);

	for (int j = 0; (abs(a * sn) > tolerance) && j < 3000; ++j)
	{
		e += a*sn;
		a *= (n - 3)/n *k*k;
		sn = ((n - 1)*sn - pow(s, n - 1)*c)/n;
		n += 2.0;
	}

	return e;
}
```