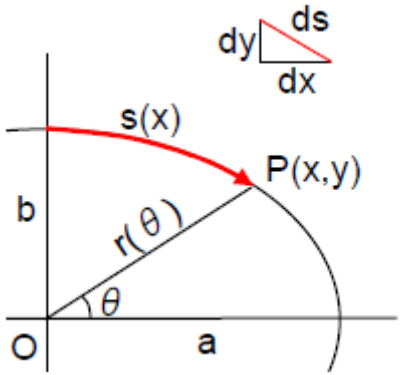
| 楕円弧長の計算方法<br>(How to calculate the elliptical arc length) | | | 作成 2015/12/20<br>ニューラルソフト有限会社 市来 博記 |
|---|---|---|---|
| 初版 | – | 2015/12/20 | |
| | | | |
| | | | |

(参考：http://keisan.casio.jp/keisan/lib/real/system/2006/1343716870/Elliptic%20arc%20length.pdf)




楕円の方程式

$a > 0, b > 0, a \geq b$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots (1)$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2}$$

$$y = \sqrt{b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2}}$$

$$= \sqrt{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$$

$\frac{1}{a}$ を掛ける

a を掛ける
(ルートの中は $a^2$)

$$= b\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

楕円弧長 s(x)

$$Arc\ Length = \int ds = \int \overbrace{\sqrt{dx^2 + dy^2}}^{ds^2 = dx^2 + dy^2 \text{なので}} = \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{dx^2}} dx$$

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx$$

$$= \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

ここで、(1)の式を x で微分すると

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)' = 1'$$

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y\frac{dy}{dx}}{b^2} = 0$$

$$\frac{2y\frac{dy}{dx}}{b^2} = \frac{-2x}{a^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2 x}{ya^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b^2 x}{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}a^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$

なので、

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^x \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx$$

分母と分子に$\frac{1}{a^2}$を掛ける

$$= \int_0^x \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\frac{x^2}{a^2}}{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}}\, dx$$

$$= \int_0^x \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\frac{x^2}{a^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\, dx$$

$$= \int_0^x \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\, dx$$

ここで、離心率は

$\mathrm{k} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ であり、

$k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

$\frac{b^2}{a^2} = 1 - k^2$ なので

$$= \int_0^x \sqrt{1 + \frac{1 - k^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\, dx$$

$$= \int_0^x \sqrt{1 + \frac{(1 - k^2)\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\, dx$$

$$= \int_0^x \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - k^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\, dx$$

分母を合わせる

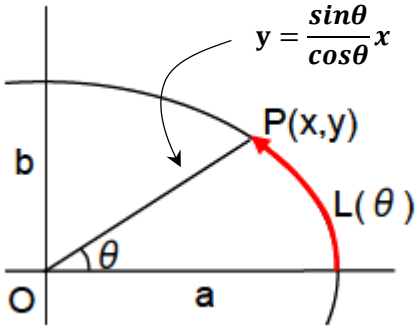
$$= \int_0^x \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - k^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\, dx$$

$$= \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\, dx \qquad \mathrm{t} = \frac{x}{a}$$

$$= a\int_0^{\frac{x}{a}} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt$$

$$= aE\left(\frac{x}{a}, k\right) \cdots (2) \qquad E(x,k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}}\, dx$$

となる。




楕円弧 L( θ )

$$L(\theta) = s(a) - s(x)$$

$x$は楕円と直線 $y = \frac{sin\theta}{cos\theta}x$の交点$(x \geq 0, y \geq 0)$の X 座標

なので、

$y = \frac{sin\theta}{cos\theta}x$ を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に代入して

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{b^2x^2 + a^2\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}x^2}{a^2b^2} = 1$$

$$b^2x^2 + a^2\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}x^2 = a^2b^2$$

$$x^2\left(b^2 + a^2\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}\right) = a^2b^2$$

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 + a^2\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}}$$

分母を合わせる

$$x^2 = \frac{\frac{a^2b^2}{1}}{\frac{b^2cos^2\theta + a^2sin^2\theta}{cos^2\theta}}$$

$$x^2 = \frac{a^2b^2}{b^2cos^2\theta + a^2sin^2\theta} \cdot cos^2\theta$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2cos^2\theta + a^2sin^2\theta}} \cdot \cos\theta \quad \cdots (3)$$

(2)の式と(3)の式より

$$\mathrm{L}(\theta) = a\left\{E(1,k) - E\left(\frac{x}{a},k\right)\right\}$$

となる。

$$x = \sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2cos^2\theta + a^2sin^2\theta}} \cdot \cos\theta$$

$$s(x) = aE\left(\frac{x}{a},k\right)$$