

レンダリング		技術資料		検認	照査	作成
						市来 博記
表 題		<p style="text-align: center;">光に関する基礎知識 (3DCG で艶のある面への映り込みを表現)</p>				
副 題		<p style="text-align: center;">Basic knowledge about light</p>				
キ ー ワ ー ド		<p>光,反射,屈折,light,Reflection,Refraction,BRDF,BSSRDF,CINEMA 4D</p>				
参照/添付資料		<div style="text-align: right; border: 1px solid black; padding: 2px;"> A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z </div>				

目次

1. はじめに	3
2. 資料作成の経緯	3
3. 光に関する基礎知識の確認	4
3.1 感覚的な疑問	4
3.2 そもそも光とは何?	6
3.3 光(電磁波)の広がりを表す量	7
3.4 光(電磁波)の放射量	7
3.5 白熱電球の輝度	11
3.6 光の測光量	12
3.7 偏光(光の偏り)	14
3.8 光(電磁波)の屈折と反射	15
3.8.1 光の屈折の法則 (スネルの法則)	15
3.8.2 斜めに入射するときの透過と反射の法則	16
3.9 拡散反射	27
3.10 拡散反射モデル	27
3.11 古典的なフォン反射モデル	28
3.12 CV と CG における反射モデル	29
3.12.1 BRDF	29
3.12.2 BSSRDF	34
4. 写り込んでいる物体の特定と CINEMA 4D による撮影	37
5. 特記事項	40

1. はじめに

本資料は光る物体が艶のある面に映り込むことでできるハイライトを CINEMA 4D で実現するために必要となる光に関する基礎知識を記した技術資料である。本資料の記載内容の参考元と引用元については特記事項の章に記載する。

2. 資料作成の経緯

この資料を作成する発端となった画像を図 2-1 に示す。



図 2-1 この資料を作成する発端となった画像

この画像はインターネット サイト用の画像を作成する際、参考にしたアドビ ストックの画像（プレビュー版）である。この画像にはハイライト部分がたくさんあるが、黒丸で囲んだ部分が妙に気になった。そこで、自作の画像にも同様のハイライトを付ける方法を考察した。

画像にハイライトを加える方法は数多く存在するので、以下の前提条件を定めた。

- CINEMA 4D の機能のみで実現する。（2D 画像のレタッチは行わない。）
- 黒丸で囲んだ部分を含む物体は艶のあるプラスチックであり、質感は一樣である。
- 黒丸で囲んだ部分のハイライトは白く光る何かが写り込んだものである。

考察の対象となるハイライトの特徴を表 2-1 に示す。

表 2-1 考察対象のハイライトの特徴

番号	考察対象の CG 画像のハイライトの特徴
1	平面上の広い長方形の範囲にでるハイライト
2	円筒面にでる照明器具の像らしきハイライト
3	文字形状の領域にでるハイライト

3. 光に関する基礎知識の確認

暗闇を懐中電灯で照らすとそこにあるものが見える。これは懐中電灯から発せられた光が物体で反射され、反射光が目に入ることで認識される現象であるが、感覚的な疑問が幾つかある。

3.1 感覚的な疑問

(1) 疑問 1 : 光の到達経路

暗闇の中で懐中電灯を照らした所に球があると、半球が見える。当たり前ではあるが、少し考えるとボールが壁に当たって跳ね返る現象とは異なっている。もし、光がボールと同じように反射するならば点か小さな円に見える筈である。

全体の材質が一樣で回転しないボールが平面でへこまない壁に衝突した場合の反射は図 3-1 のようになる。(重力は無視)

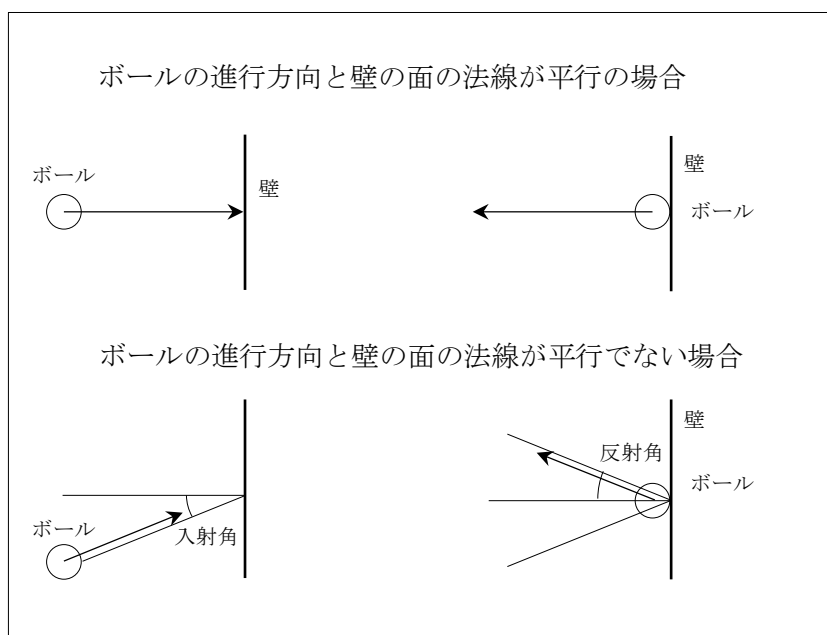


図 3-1 ボールの反射

ボールは壁に衝突すると壁の面の法線を基準にして、それまで進んできた方向と逆の方向に進む。ボールを懐中電灯の光の束 (レンズにより光は平行に進んでいると仮定)、壁を球に置き替えて考えると、球面の法線の方向は連続して変化するので図 3-2 のようになり、球面上の小さな領域で反射した光のみが目には到達することになる。

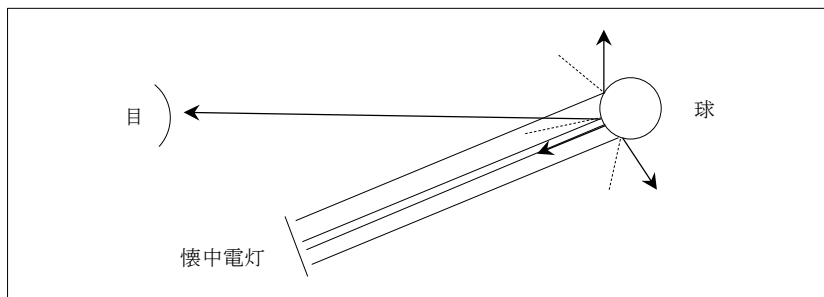


図 3-2 ボールの反射と同じとした場合の光の反射経路

(2) 疑問2：光の属性の変化

暗闇の中で白い光を放つ懐中電灯を照らした所に赤い球があると、赤い半球が見える。これも当たり前ではあるが、ボールが壁に当たって跳ね返る現象に当てはめて考えると解せない。光が球の表面で反射しているとすると、光が通過している媒質に変化がないからである。白い光は白い光のまま反射する筈である。

では何故、白い光を放つ懐中電灯で暗闇にある赤い球を照らすと赤い半球が見えるのか？次のような条件を満たすもう一つの反射が起こるとすれば辻褃が合う。

1. 物体の表面ではなく、少し内部に入り込んだ所で反射する。
2. 多様な方向に満遍なく反射する。(但し、保存則に従う。)
3. 入射光と物体表面の法線との角度によって反射光の強さが変化する。(角度が大きくなると弱くなる。)

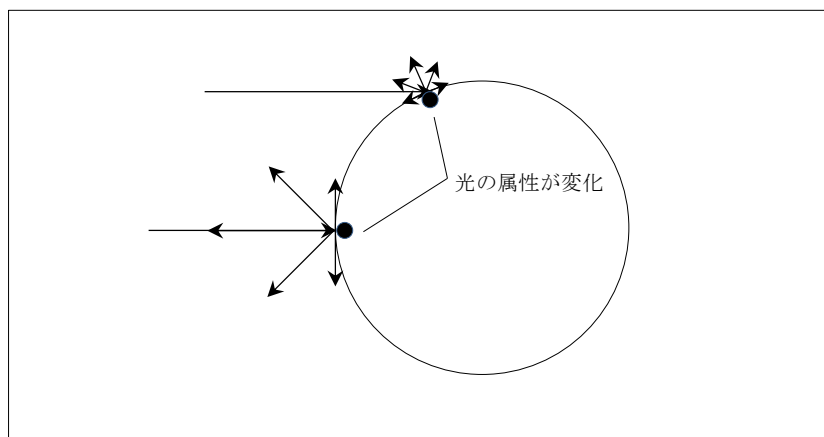


図 3-3 もう一つの反射

1の条件が満たされると、光は少しだけ球の物体内部を通過することになる。赤い物体は赤い光を少しだけ通す性質がある媒質と考えると、白い光を放つ懐中電灯で暗闇にある赤い球を照らすと赤い半球が見えることが納得できる。

2の条件が満たされると、入射角に依存しない方向にも光が反射するので球が半球として見えることが納得できる。

3の条件が満たされると、球面に明暗が付くため、二次元の円ではなく半球として見えることが納得できる。

ここまでは筆者の感覚的なものであるが、学術的にも物体表面付近で起こる光の反射は界面で発生する鏡面反射と界面下の十分小さい範囲で起こる拡散反射が存在することをインターネットや書籍で確認できる。ここで、CINEMA 4Dのマテリアルやレンダリング設定のパラメータの意味を明確にするために光の性質について確認する。

3.2 そもそも光とは何？

光(可視光)は波長が 380 - 780 nm の電磁波である。電磁波は電界と磁界の変化を伝搬する波（波動）である。電磁波は波と粒子の性質を併せ持つ。電界は電圧がかかっている空間の領域であり、磁界は磁気はたらく空間の領域である。電流は（真電流/変位電流）周りに磁界¹を発生させる。磁界は電流の変動に応じて変動²し、磁界の変化は、それを妨げる方向の電界を発生させる。電界が磁界を発生させ、磁界が電界を発生させる連鎖が光(電磁波)の正体である。

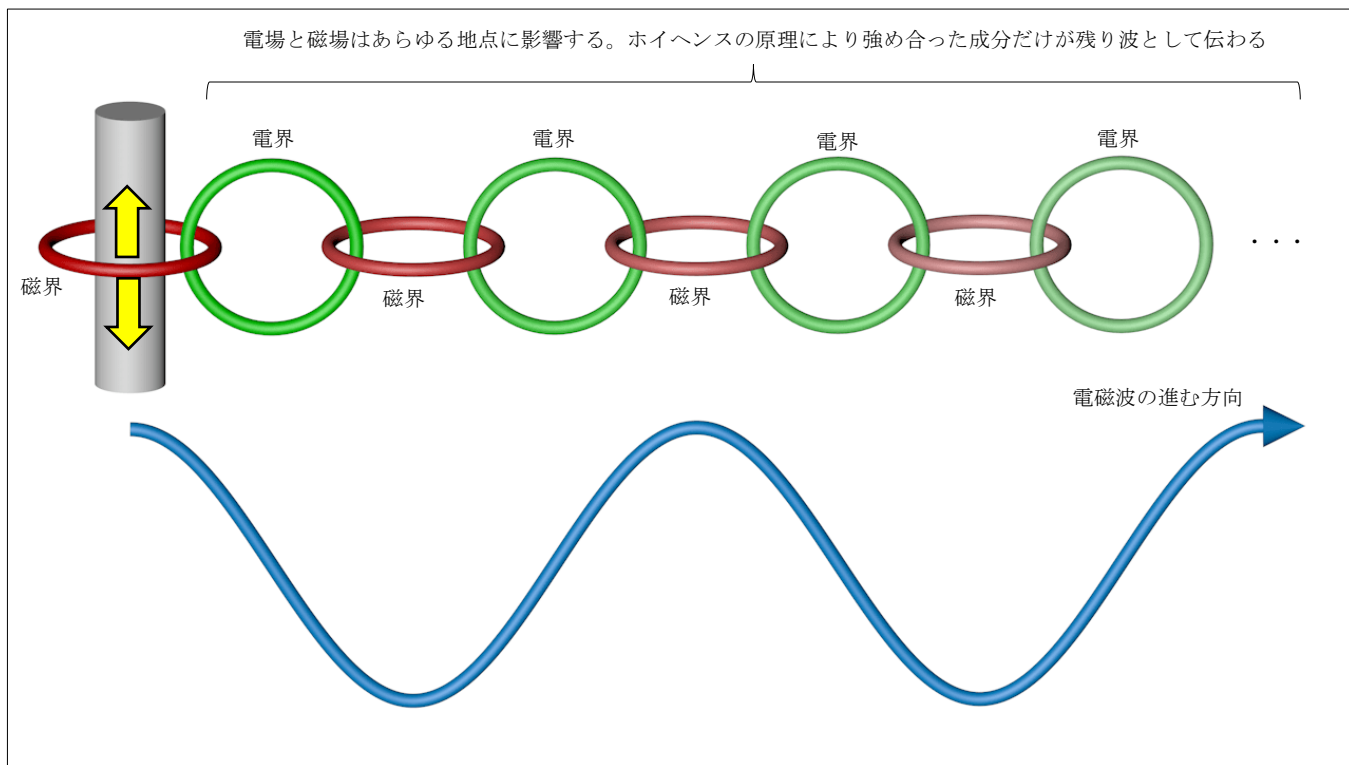


図 3-4 電磁波の伝搬のイメージ

波動を表現する式

実数表示 $\psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz + \Phi) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}z + \Phi\right)$

複素数表示 $\psi(z, t) = Ae^{j(\omega t - kz + \Phi)} = Ae^{j\Phi}e^{j(\omega t - kz)}$

$A_{complex} = Ae^{j\Phi}$ を複素振幅とすると、

$$\text{Re}[A_{complex}e^{j(\omega t - kz)}] = A \cos(\omega t - kz + \Phi)$$

ω : 角周波数(rad/s)
 k : 波数(m^{-1})
 Φ : 初期位相
 T : 周期(s)
 λ : 波長(m)
 周波数 $f = \frac{1}{T}$
 角周波数 $\omega = 2\pi f$
 re[...]は複素数の実数部

1 永久磁石の磁界も磁石を構成する物質が持っている電子の自転が磁界発生之源となっている。
 2 磁界の強さと向きはアンペールの法則に従う。

3.3 光(電磁波)の広がりを表す量

光(電磁波)の進行方向に対して垂直な面への広がりを表す量として立体角が用いられる。立体角は錐体の頂点から見た広がりを表す量であり、単位はステラジアン(sr)がよく用いられる。

ある点を O として、 r だけ離れた位置 P にある微小面 dS についての点 O から見た立体角は、 dS と点 O とを結ぶ直線に垂直な面上へ dS を射影した dSp と r により、 dSp/r^2 で与えられる。

点 O を頂点とし、微小面 dS あるいは dSp を底とする錐が単位球表面を切り取る面積を $d\omega$ とすれば、 $r=1$ であることから、 $d\omega/r^2=d\omega$ が立体角となる。(全球、半球、半頂角 θ の円錐の立体角は順に、 $4\pi\text{ sr}$ 、 $2\pi\text{ sr}$ 、 $2\pi(1-\cos\theta)\text{ sr}$ となる。)

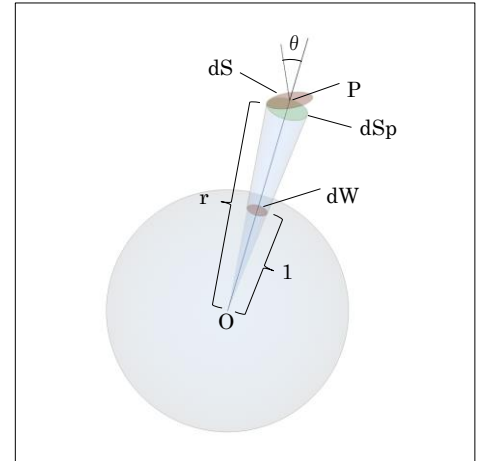


図 3-5 立体角

3.4 光(電磁波)の放射量

(1) 放射エネルギー

次項に示す放射束の時間積分量である。(単位はジュール(J))

(2) 放射束

ある面を単位時間あたりに通過する放射エネルギーを表す物理量である。(単位はワット(W=J/s))

放射源を囲う面を通り抜ける全放射束は放射源の仕事率に等しい。放射源が電流によるもので、損失がないとすると、消費電力に等しく、放射電力とも呼ばれる。

波長 λ の電磁波の分光放射束を Φ_λ とすると、波長範囲 $[\lambda_2, \lambda_1]$ ($\lambda_2 \geq \lambda_1$) における放射束 Φ は

$$\Phi = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} \Phi_\lambda d\lambda \quad (\Phi_\lambda \text{ の単位は } W/[m, \mu, n]m)$$

となる。

(3) 放射強度

点状の放射源からある方向へ放出される単位立体角あたりの放射束である。(単位はワット毎ステラジアン(W/sr))

放射強度は方向によって変化する。例えば、アンテナから放射される放射束は、アンテナの形状と方向によって密度が大きく異なり、角度によって放射強度が変わる。また、放射強度は点状と見なすことのできる放射源に対して有用な量である。例えば、星などの天体に適用される。これに対して放射源の広がり(面積)を考慮するときは放射輝度を用いる。

点状の放射源を基準とし、位置 r にある面 S の微小部分を ΔS 、その微小面を底とし、放射源を頂点とする立体角を $\omega(\Delta S)$ 、 ΔS を貫く放射束を $\Phi(\Delta S)$ とするとき、放射源の r 方向への放射強度は

$$I = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Delta S)}{\omega(\Delta S)} = \frac{d\Phi}{d\omega}$$

と定義される。

この定義から面積 S の面を貫く放射束 $\Phi(S)$ は

$$\Phi(S) = \int_{\omega(S)} I d\omega$$

となる。

放射源の放射強度が S の範囲で方向によらず、 S が放射源を中心とする半径 r の球面の一部の場合、

$$\Phi(S) = I \frac{S}{r^2}$$

となる。

波長 λ の電磁波の分光放射強度を I_λ とすると、波長範囲 $[\lambda_2, \lambda_1]$ ($\lambda_2 \geq \lambda_1$) における放射強度 I は

$$I = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} I_\lambda d\lambda \quad (I_\lambda \text{の単位は W/sr/[m, } \mu \text{, n]m)}$$

となる。

(4) 放射輝度

放射源の表面上の点からある方向へ放出される単位面積単位立体角あたりの放射束である。(単位はワット毎平方メートル毎ステラジアン(W/sr/m²))

放射源の表面上の点 O を含む微小面を ΔA があり、点 O を基準として位置 r に微小面 ΔS があり、微小面 ΔA の法線 \mathbf{n} と $\hat{\mathbf{r}}$ のなす角が θ 、 ΔS を底とし、点 O を頂点とする錘の立体角を $\omega(\Delta S)$ 、 ΔS を貫く放射束を $\Phi(\Delta S)$ とするとき、点 O から r 方向への放射輝度は

$$L = \lim_{\Delta A \rightarrow 0, \Delta S \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Delta S)}{\cos \theta \Delta A \omega(\Delta S)} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{d^2 \Phi}{dA d\omega}$$

と定義される。

ΔA が十分小さい場合、点 O から r 方向への放射強度は

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega} = \int_{\Delta A} L \cos \theta dA$$

となる。

波長 λ の電磁波の分光放射輝度を L_λ とすると、波長範囲 $[\lambda_2, \lambda_1]$ ($\lambda_2 \geq \lambda_1$) における放射強度 L は

$$L = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} L_\lambda d\lambda \quad (L_\lambda \text{の単位は W/sr/m}^2\text{/[m, } \mu \text{, n]m)}$$

となる。

(5) 放射照度

単位面積あたりに入射する放射束である。(単位はワット毎平方メートル(W/m²))

放射照度は照射される対象の指標である。

披照面 S 上の微小面 ΔS に照射される放射束を $\Phi(\Delta S)$ とすると、放射照度は

$$E = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Delta S)}{\Delta S} = \frac{d\Phi}{dS}$$

ΔS への入射角が 0 でない場合、 ΔS への放射束が小さくなる為、照度は小さくなる。入射角を θ とすると、 $d\Phi_\theta = d\Phi_0 \cos \theta$ となる。

と定義される。

この定義から、披照面 S に照射される放射束は

$$\Phi(S) = \int_S E ds$$

となる。

点状の放射源を基準とし、位置 r にある面 S の微小部分を ΔS 、 ΔS の法線を \mathbf{n} 、 \mathbf{n} と \hat{r} のなす角を θ 、 ΔS を底とし、放射源を頂点とする立体角を $\omega(\Delta S)$ 、 ΔS を貫く放射束を $\Phi(\Delta S)$ とすると、この放射源が S 上の r 点を照らす放射照度は

$$E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{d\Phi}{dw} \frac{dw}{dS} = I \frac{dw}{dS} = I \frac{(dS \times (\mathbf{n} \cdot \hat{r})) / r^2}{dS} = \cos \theta \frac{I(\text{単位: W/sr})}{r^2(\text{単位: m}^2/\text{sr})}$$

となる。

面積が S の放射源面上の微小部分の輝度を L とし、その法線から θ_{out} の方向に r 離れた位置 P に被照面上の点があり、入射角が θ_{in} である場合、位置 P の放射照度は立体角投射の法則により

$$E = \int_S \frac{\cos \theta_{out} dS}{r^2} L \times \cos \theta_{in}$$

$$= L \omega \times \cos \theta_{in} = LS' \cos \theta_{in} = LS''$$

但し、 ω は位置 P から面放射源を見る立体角となる。

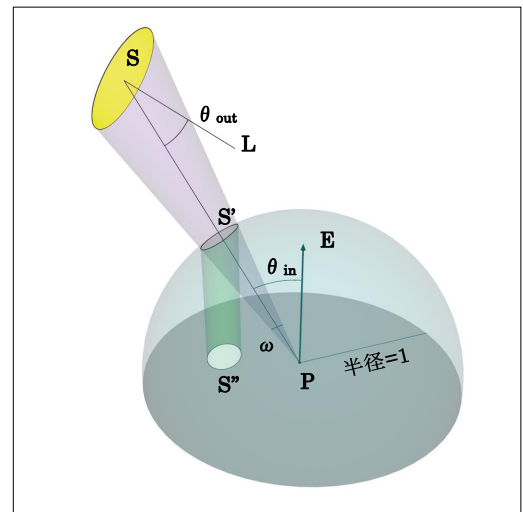


図 3-6 立体角

波長 λ の分光放射照度を E_λ とすると、波長範囲 $[\lambda_2, \lambda_1](\lambda_2 \geq \lambda_1)$ における放射照度 E は、

$$E = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} E_\lambda d\lambda \quad (E_\lambda \text{の単位は } \text{W/m}^2/[\text{m}, \mu, \text{n}]\text{m})$$

となる。

(6) 放射発散度

単位面積あたりに放出する放射束である。(単位はワット毎平方メートル(W/m^2))

照射された物体が反射する場合、反射率が1のとき、放射発散度は放射照度と等しくなる。

放射面上の微小面積を dS とし、その法線から θ の方向への放射輝度を L とすると、放射発散度は

$$M = \int_{\text{半空間}} L \cos \theta d\omega$$

となる。

放射輝度 L が方向によらない場合(理想的な完全拡散放射源と完全拡散面の場合)の放射輝度と放射強度のイメージは図 3-7 と図 3-8 のようになる。

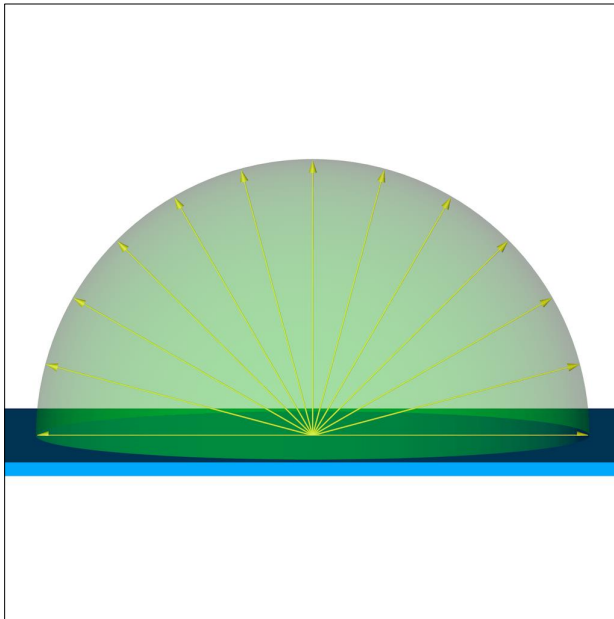
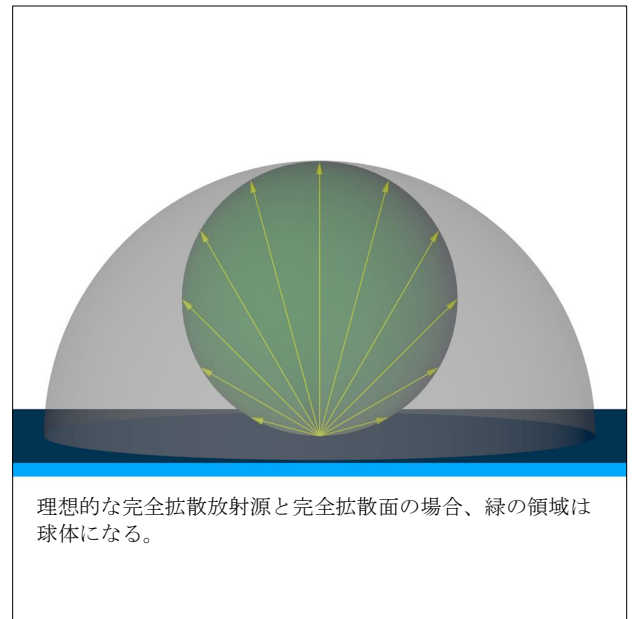


図 3-7 放射輝度のイメージ



理想的な完全拡散放射源と完全拡散面の場合、緑の領域は球体になる。

図 3-8 放射強度のイメージ

放射発散度は図 3-8 の放射輝度×緑の領域の表面積(立体角)であり、

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^{\pi/2} L \cos \theta \cdot 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta \\
 &= 2\pi L \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \quad \text{①} \\
 &= \pi L \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \cdot d\theta \quad \text{②} \\
 &= \pi L \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} = \pi L
 \end{aligned}$$

となる。

① 積・和公式を使用

$$\text{② } \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta$$

$$2\theta = u, \quad du = 2d\theta, \quad 1/2 du = d\theta$$

として式を書き換えると

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \sin(u) \frac{1}{2} du &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(u) du \\
 &= \frac{1}{2} [-\cos(2\theta)]_0^{\pi/2} = \frac{-(-1) - (-1)}{2} = 1
 \end{aligned}$$

となる。

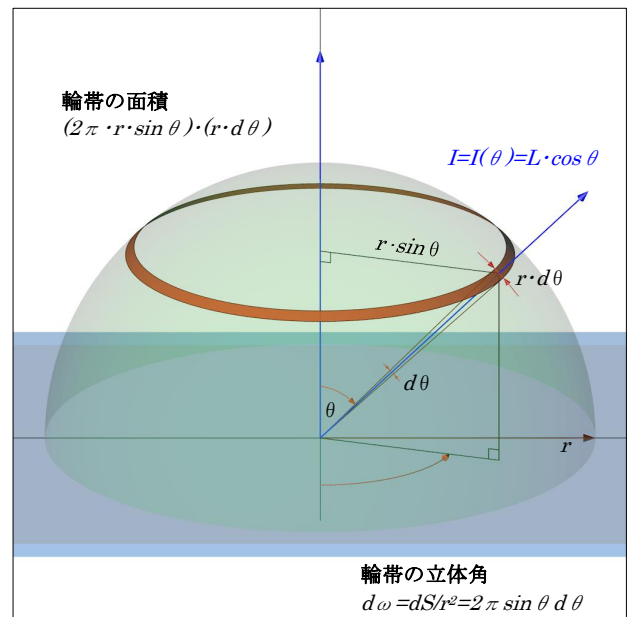


図 3-9 半空間の表面積算出の考え方

波長 λ の分光放射発散度を M_λ とすると、波長範囲 $[\lambda_2, \lambda_1]$ ($\lambda_2 \geq \lambda_1$)における放射発散度 M は、

$$M = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} M_\lambda d\lambda \quad (M_\lambda \text{の単位は } W/m^2/[m, \mu, n]m)$$

となる。

3.5 白熱電球の輝度

ジュール熱による輻射を利用した白熱電球から放出される光のスペクトルは黒体放射に近い。(可視光の放射に使用される電力は10%程度、赤外放射は72%、残りは熱伝導により消費される。) プランクの法則において、黒体から輻射される電磁波の分光放射輝度は、周波数 ν と温度 T の関数として、

$$L(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} [\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}] \dots \textcircled{1}$$

$L(\nu, T)$: 分光放射輝度
h	: プランク定数
k	: ボルツマン定数
C	: 光速度

と表される。分光放射輝度 $L(\nu, T)$ は、放射面の単位面積、立体角、周波数あたりの放射束を表しており、 $h\nu = 2.82kT$ 位置にピークをもち、高周波数においては指数関数的に、低周波数においては多項式的に減少する。

また、分光放射輝度を全立体角について積分することで、分光エネルギー密度を

$$u(\nu, T) = \frac{1}{c} 4\pi L(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} [\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1}]$$

と表すことができる。

放射源の表面上の点からある方向へ放射される光線は1秒間に C 進む。長さ C の1光線に着目すると、単位長あたりの光線中に存在する光子のエネルギーの和がエネルギー密度であるため。

①の式の ν (周波数) を C/λ に置き替えて、 ν/λ を掛けることで、波長 λ と温度 T の関数が得られる。

$$L'(\lambda, T) = L(\nu, T) \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \frac{\nu}{\lambda} = \frac{2h(C/\lambda)^3}{c^2} \frac{1}{e^{h(C/\lambda)/kT} - 1} \frac{c/\lambda}{\lambda} \quad \because \nu = \frac{C}{\lambda}$$

$$= \frac{2hC^3}{c^2\lambda^3} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \frac{c}{\lambda^2} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} [\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}]$$

この関数は、 $hc = 4.97\lambda kT$ 位置にピークをもち。

周波数 ν と温度 T の関数と同様に、全立体角について積分することで、分光エネルギー密度を

$$u'(\lambda, T) = \frac{1}{c} 4\pi L'(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} [\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^{-1}]$$

と表すことができる。

白熱電球のフィラメントの温度が 2500K とすると分光放射輝度は図 3-10 のようになる。

周波数範囲 $[\nu_1, \nu_2]$ または波長範囲 $[\lambda_2, \lambda_1] = [C/\nu_2, C/\nu_1]$ における放射輝度 $L_{\lambda_2 \sim \lambda_1}(T)$ は $L(\nu, T)$ または $L'(\lambda, T)$ の積分として求められる。

分光輝度(Hz) × 周波数と分光輝度(λ × 波長の面積値を合わせるため。

$$L_{\lambda_2 \sim \lambda_1}(T) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} I(\nu, T) d\nu = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} I'(\lambda, T) d\lambda$$

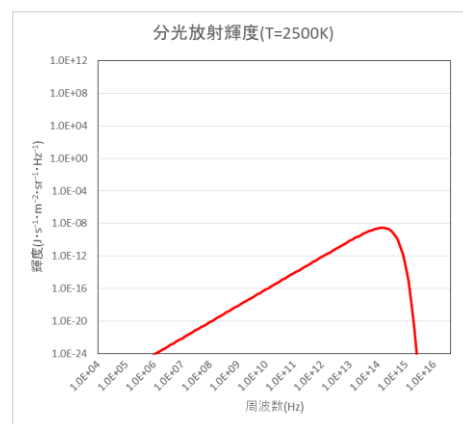


図 3-10 分光放射輝度(T=2500K)

3.6 光の測光量

(1) 光量(光度エネルギー)

次項に示す光束の時間積分量である。(単位はルーメン秒(lm・s))

(2) 光束

放射束を視感度で評価した心理物理量である。(単位はルーメン(lm)またはカンデラ・ステラジアン)

可視光の波長ごとの分光放射束を Φ_λ 、視感度を k_λ とすると、光束 $\Phi_{\lambda 780\sim 380}$ は以下の定義となる。

$$\Phi_{\lambda 780\sim 380} = \int_{780}^{380} k_\lambda \Phi_\lambda d\lambda$$

すなわち光束は「波長ごとに視感度で重み付けされた光の放射束の和」である。

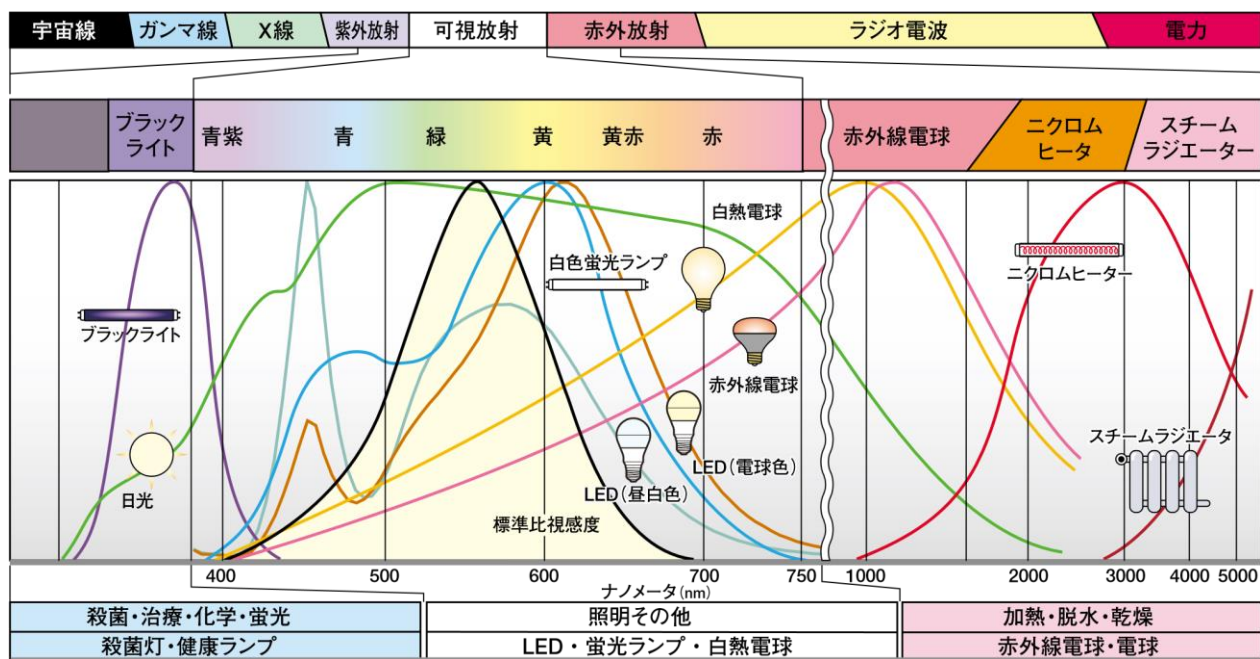
視感度は可視光線の波長領域 380~780nm のほぼ中央の 555nm の波長で最大となり、両端へ近づくほど小さくなる。555nm の波長における最大視感度値は

$$k_m = k_{555} = 683[\text{lm/w}]$$

となる。最大視感度との比をとることで、比視感度 $V_\lambda = k_\lambda/k_m$ が定義され、光束 $\Phi_{\lambda 780\sim 380}$ は

$$\Phi_{\lambda 780\sim 380} = k_m \int_{780}^{380} V_\lambda \Phi_\lambda d\lambda$$

と表される。



注) ナノメータ (nm) = 10⁻⁹m

図 3-11 放射エネルギーのスペクトル

(http://www.tlt.co.jp/tlt/lighting_design/design/basic/basic.htm : 明るさの定義と単位 (PDF) より)

(3) 光度

放射強度を視感度で評価した心理物理量である。(単位はカンデラ(cd))

可視光の波長ごとの分光放射強度を I_λ 、視感度を k_λ とすると、光度 $I_{\lambda 780\sim 380}$ は以下の定義となる。

$$I_{\lambda 780\sim 380} = \int_{780}^{380} k_\lambda I_\lambda d\lambda$$

すなわち、光度は「波長ごとに視感度で重み付けされた光の放射強度の和」である。

最大視感度を $k_m = 683[\text{lm/w}]$ として、最大視感度との比によって比視感度 $V_\lambda = k_\lambda/k_m$ を定めれば、

$$I_{\lambda 780\sim 380} = k_m \int_{780}^{380} V_\lambda I_\lambda d\lambda \text{ と表される。}$$

(4) 輝度

放射輝度を視感度で評価した心理物理量である。(単位はカンデラ毎平方メートル(cd/m^2))

可視光の波長ごとの分光放射輝度を L_λ 、視感度を k_λ とすると、光度 $L_{\lambda 780\sim 380}$ は以下の定義となる。

$$L_{\lambda 780\sim 380} = \int_{780}^{380} k_\lambda L_\lambda d\lambda$$

すなわち、輝度は「波長ごとに視感度で重み付けされた光の放射輝度の和」である。

最大視感度を $k_m = 683[\text{lm/w}]$ として、最大視感度との比によって比視感度 $V_\lambda = k_\lambda/k_m$ を定めれば、

$$L_{\lambda 780\sim 380} = k_m \int_{380}^{780} V_\lambda L_\lambda d\lambda \text{ と表される。}$$

(5) 照度

放射照度を視感度で評価した心理物理量である。(単位はルクス(lx)またはルーメン毎平方メートル(lm/m^2))

可視光の波長ごとの分光放射照度を E_λ 、視感度を k_λ とすると、照度 $E_{\lambda 780\sim 380}$ は以下の定義となる。

$$E_{\lambda 780\sim 380} = \int_{780}^{380} k_\lambda E_\lambda d\lambda$$

すなわち、照度は「波長ごとに視感度で重み付けされた光の放射照度の和」である。

最大視感度を $k_m = 683[\text{lm/w}]$ として、最大視感度との比によって比視感度 $V_\lambda = k_\lambda/k_m$ を定めれば、

$$E_{\lambda 780\sim 380} = k_m \int_{380}^{780} V_\lambda E_\lambda d\lambda \text{ と表される。}$$

(6) 光束発散度

放射発散度を視感度で評価した心理物理量である。(単位はルクス(lx)またはルーメン毎平方メートル(lm/m^2))

可視光の波長ごとの分光放射発散度を M_λ 、視感度を k_λ とすると、光束発散度 $M_{\lambda 780\sim 380}$ は以下の定義となる。

$$M_{\lambda 780\sim 380} = \int_{780}^{380} k_\lambda M_\lambda d\lambda$$

すなわち、光束発散度は「波長ごとに視感度で重み付けされた光の放射発散度の和」である。

最大視感度を $k_m = 683[\text{lm/w}]$ として、最大視感度との比によって比視感度 $V_\lambda = k_\lambda/k_m$ を定めれば、

$$M_{\lambda 780\sim 380} = k_m \int_{380}^{780} V_\lambda M_\lambda d\lambda \text{ と表される。}$$

3.7 偏光(光の偏り)

これまで述べたように、光は三次元空間を伝わる電界と磁界の連鎖（電磁波）である。電界と磁界は力の作用する向きと大きさをもっておりベクトルで表される。電界ベクトル E と磁界ベクトル H の向きは互いに直交している。電界 E を含む面を振動面、磁界 H を含む面を偏光面と言う。

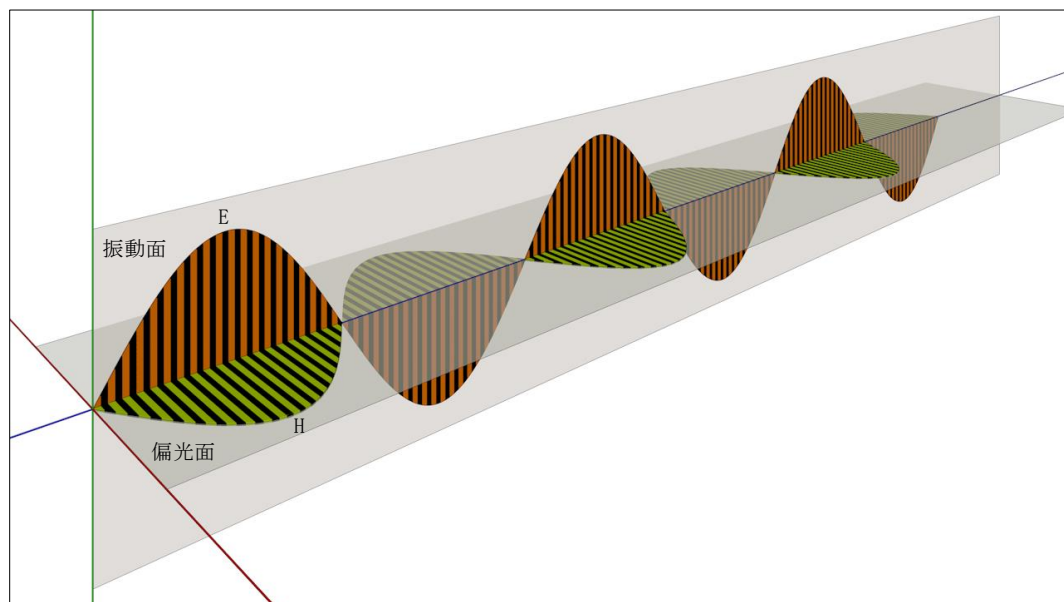


図 3-12 電磁波の電界ベクトル E と磁界ベクトル H

ある位置で見た電界（または磁界）ベクトルの時間的空間的分布によって偏光を分類することができる。

- 直線偏光
時間の経過に伴い、電界ベクトルが直線内で振動する偏光（偏光面が一つの平面に限られる。）
- 自然光
偏光の向きが空間内に一様に分布している光（太陽、白熱電球、蛍光灯、LED から発せられる光）
- 楕円偏光
時間の経過に伴い、電界ベクトルが回転するような偏光（位相差が 90 度で直交する 2 つの直線偏光の合成光の場合は円偏光となる。）

直線偏光は自然光から直線偏光子により取り出すことができる。

3.8 光(電磁波)の屈折と反射

入射面、p 偏光、s 偏光などの語句の定義

- 入射面
境界面に垂直で入射光・反射光を含む面
- 入射角
入射光と境界面の法線との角度
- 反射角
反射光と境界面の法線との角度
- 屈折角
透過(屈折)光と境界面の法線との角度
- 波数ベクトル
波動の位相速度の方向 (電界と磁界と波数ベクトルは互いに直交関係)
- p(parallel)偏光
入射面に対して水平に電界が振動する偏光
- s(senkrecht)偏光
入射面に対して垂直に電界が振動する偏光

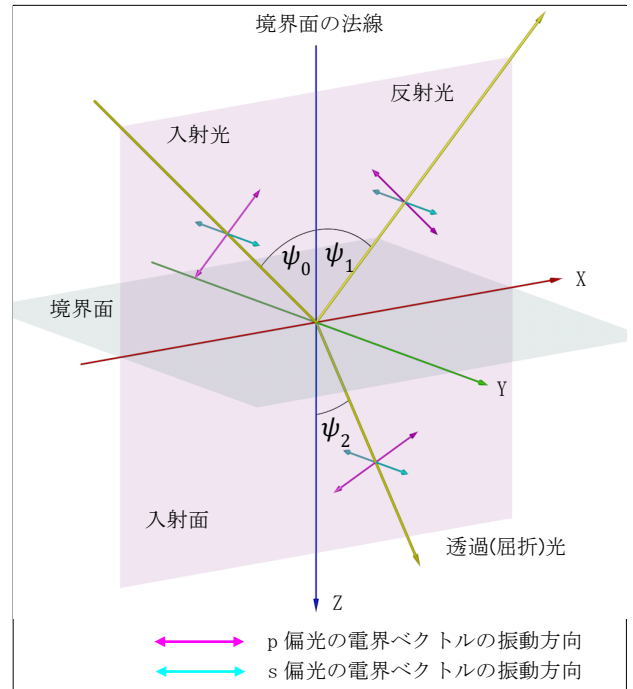


図 3-13 入射面、p 偏光、s 偏光の定義

光は誘電率が異なる媒質の境界面で反射が起きるとともに、境界面に斜めに入射すると屈折が起きる。このとき、境界面をはさんで入射光・反射光側と透過光側で波数ベクトルの界面に平行な成分の連続性と、電界と磁界の境界面に平行な成分の連続性が成り立ち (マクスウェル方程式から導かれる)、これから屈折と反射の法則を導くことができる。

3.8.1 光の屈折の法則 (スネルの法則)

波数ベクトルの界面成分の連続性からスネルの法則が得られる。

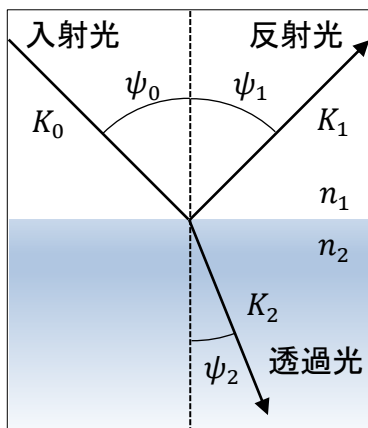


図 3-14 光の反射と屈折

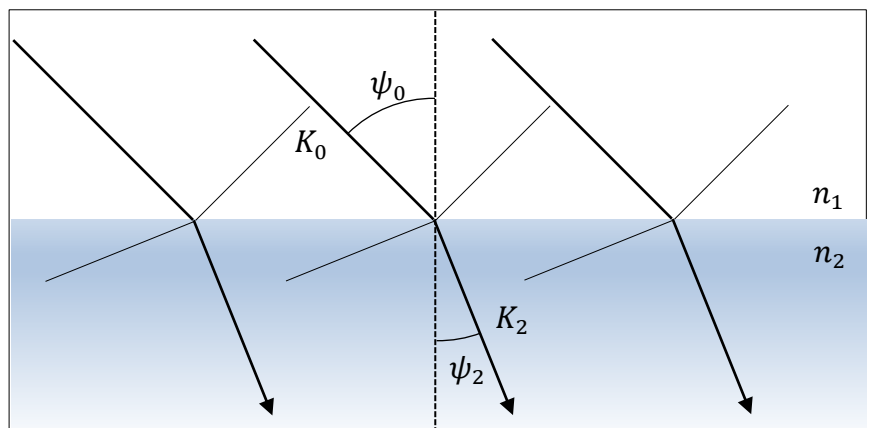


図 3-15 光の屈折—波数ベクトルの界面成分の連続性

$$K_{0x} = K_{2x}$$

$$K_0 \sin \psi_0 = K_2 \sin \psi_2$$

$$\frac{K_0}{K_2} = \frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_0}$$

両辺に $\frac{1}{K_2 \sin \psi_0}$ を掛ける

$$K_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = 2\pi \left(\frac{c/n_1}{F} \right)^{-1} = \frac{2\pi F}{c/n_1} = \frac{\omega}{c/n_1} = \frac{\omega/n_1}{c/n_1} = \frac{\omega n_1}{c}$$

$$K_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 2\pi \left(\frac{c/n_2}{F} \right)^{-1} = \frac{2\pi F}{c/n_2} = \frac{\omega}{c/n_2} = \frac{\omega/n_2}{c/n_2} = \frac{\omega n_2}{c}$$

$$\frac{\sin \psi_2}{\sin \psi_0} = \frac{\omega n_1/c}{\omega n_2/c} = \frac{n_1}{n_2}$$

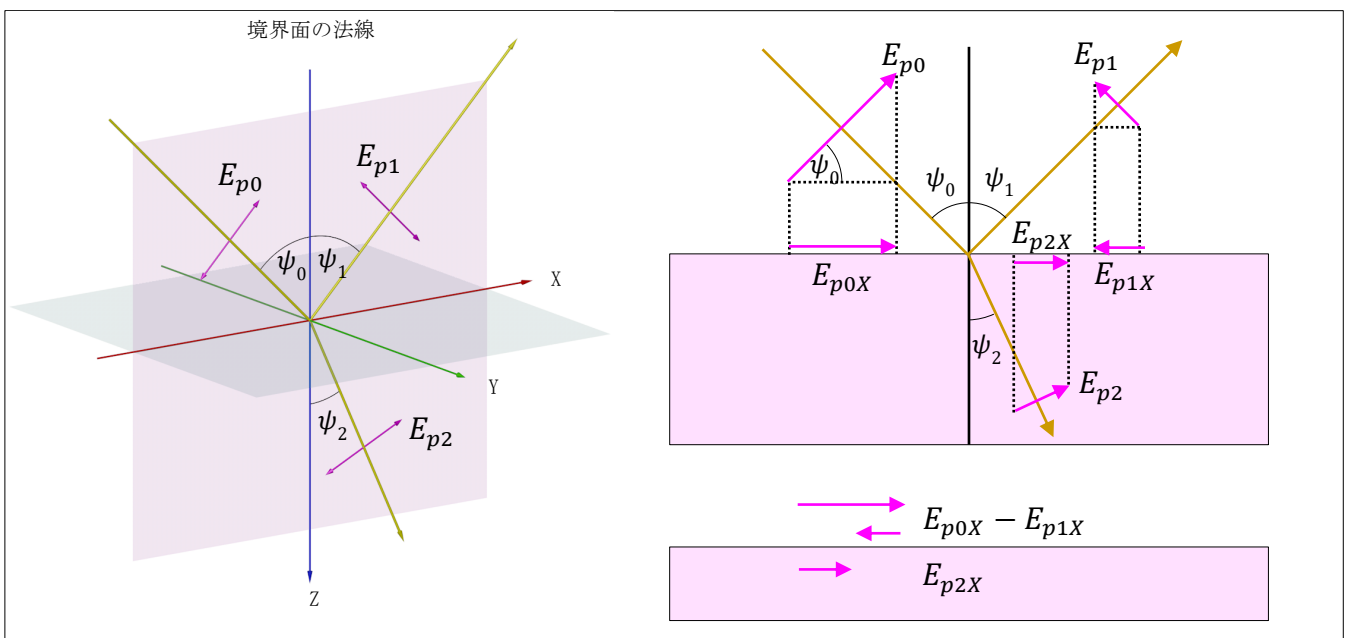
となる。

3.8.2 斜めに入射するときの透過と反射の法則

光が斜め入射するとき、偏光の向きが入射面に対して平行か垂直かで振幅反射率や位相の変化が異なる。

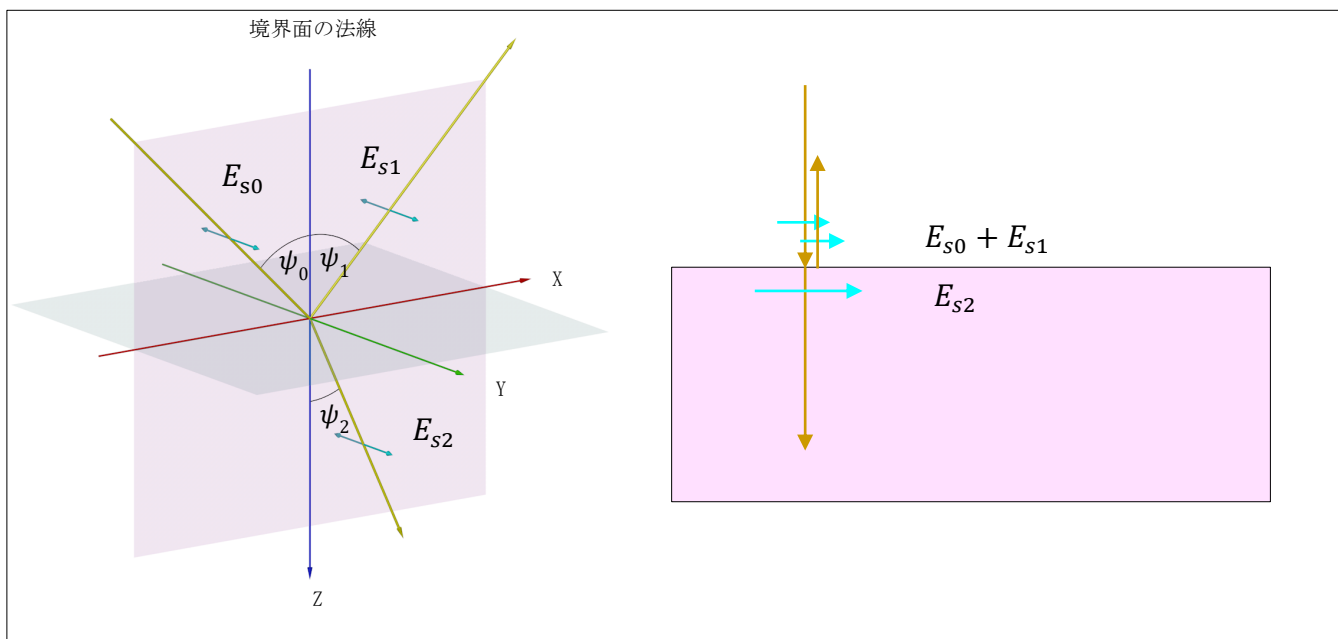
(1) 境界面における電界と磁界の p と s 成分の連続性から入射波、反射波、透過波の振幅の関係を導出

(A) 境界面における電界 p 成分の連続性から E_{p0} 、 E_{p1} 、 E_{p2} の関係を導出



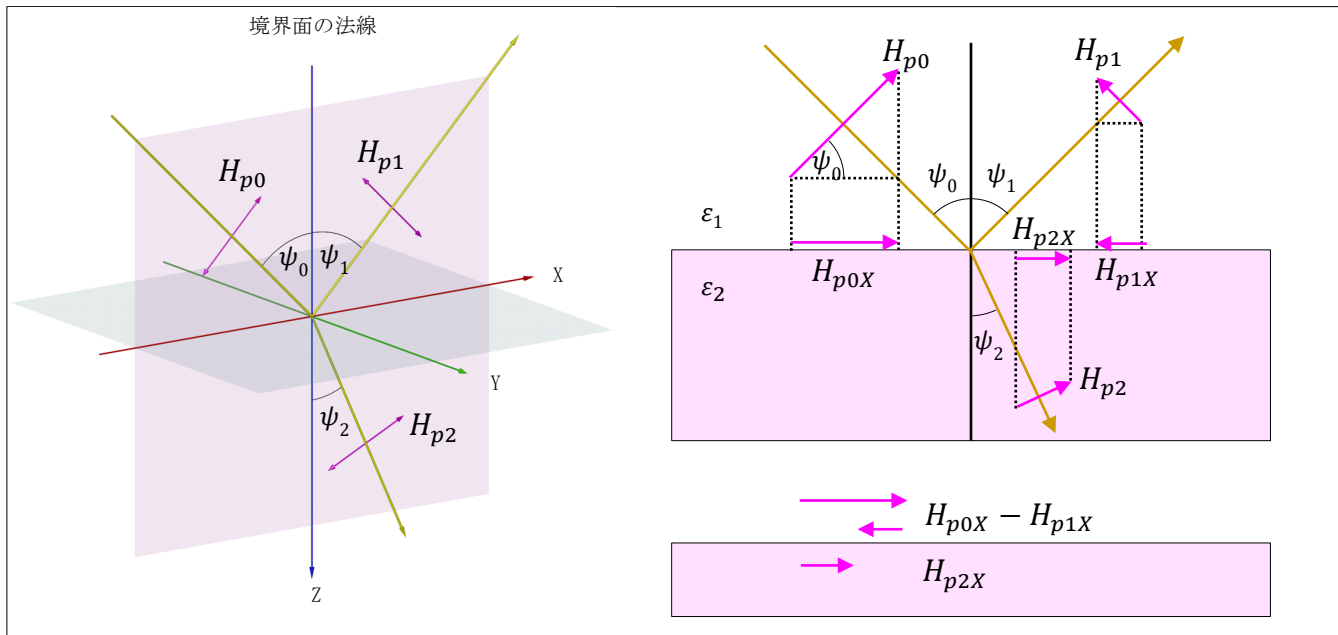
$$(E_{p0} - E_{p1}) \cos \psi_0 = E_{p2} \cos \psi_2 \quad \cdots \text{式 1}$$

(B) 境界面における電界 s 成分の連続性から E_{s0} 、 E_{s1} 、 E_{s2} の関係を導出



$$E_{s0} + E_{s1} = E_{s2} \cdots \text{式 2}$$

(C) 境界面における磁界 p 成分の連続性から H_{p0} 、 H_{p1} 、 H_{p2} の関係を導出



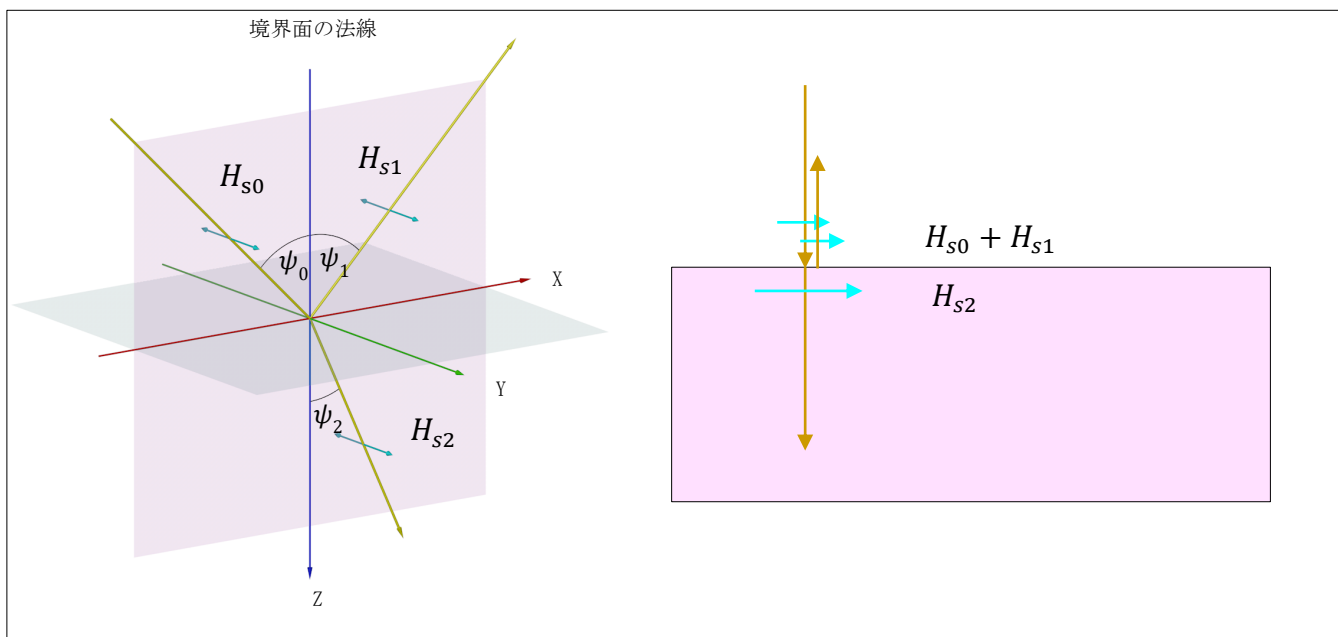
$$(H_{p0} - H_{p1}) \cos \psi_0 = H_{p2} \cos \psi_2$$

$H_p = -\frac{K}{\omega \mu_0} E_s$ によって電界についての式に書き直すと

$$-\frac{K_0}{\omega \mu_0} (E_{s0} - E_{s1}) \cos \psi_0 = -\frac{K_2}{\omega \mu_0} E_{s2} \cos \psi_2$$

$$K_0 (E_{s0} - E_{s1}) \cos \psi_0 = K_2 E_{s2} \cos \psi_2 \cdots \text{式 3}$$

(D) 境界面における磁界 s 成分の連続性から H_{s0} 、 H_{s1} 、 H_{s2} の関係を導出



$$H_{s0} + H_{s1} = H_{s2}$$

$H_s = \frac{K}{\omega\mu_0} E_p$ によって電界についての式に書き直すと

$$\frac{K_0}{\omega\mu_0} (E_{p0} + E_{p1}) = \frac{K_2}{\omega\mu_0} E_{p2}$$

$$K_0 (E_{p0} + E_{p1}) = K_2 E_{p2} \quad \dots \text{式 4}$$

(2) 境界面における電界と磁界連続性から振幅反射率を導出

$$(E_{p0} - E_{p1}) \cos \psi_0 = E_{p2} \cos \psi_2 \quad \dots \text{式 1}$$

$$E_{s0} + E_{s1} = E_{s2} \quad \dots \text{式 2}$$

$$K_0 (E_{s0} - E_{s1}) \cos \psi_0 = K_2 E_{s2} \cos \psi_2 \quad \dots \text{式 3}$$

$$K_0 (E_{p0} + E_{p1}) = K_2 E_{p2} \quad \dots \text{式 4}$$

式 1 と式 4 から E_{p2} を消去して、p 偏光の振幅反射率を計算

$$(E_{p0} - E_{p1}) \cos \psi_0 = \frac{K_0 (E_{p0} + E_{p1})}{K_2} \cos \psi_2$$

$$K_2 E_{p0} \cos \psi_0 - K_2 E_{p1} \cos \psi_0 = K_0 E_{p0} \cos \psi_2 + K_0 E_{p1} \cos \psi_2$$

$$K_2 E_{p0} \cos \psi_0 - K_2 E_{p1} \cos \psi_0 - K_0 E_{p0} \cos \psi_2 - K_0 E_{p1} \cos \psi_2 = 0$$

$$(K_2 \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2) E_{p0} - (K_2 \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2) E_{p1} = 0$$

$$(K_2 \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2) E_{p0} = (K_2 \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2) E_{p1}$$

$$(K_2 \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2) = \frac{(K_2 \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2) E_{p1}}{E_{p0}}$$

$$\frac{K_2 \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2}{K_2 \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2} = \frac{E_{p1}}{E_{p0}} = r_p$$

K_0 、 K_2 、 ψ_0 、 ψ_2 の間には、 $K_0 \sin \psi_0 = K_2 \sin \psi_2$ （スネルの法則）が成立するので、

$$\begin{aligned}
 r_p &= \frac{K_2 \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2}{K_2 \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2} = \frac{K_0 (\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2}{K_0 (\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2} = \frac{(\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_0 - \cos \psi_2}{(\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_0 + \cos \psi_2} \\
 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{(\sin \psi_0 / \sin \psi_2) (\cos \psi_0 / \cos \psi_2) - 1}{(\sin \psi_0 / \sin \psi_2) (\cos \psi_0 / \cos \psi_2) + 1} = \frac{(\sin \psi_0 \cos \psi_0 / \sin \psi_2 \cos \psi_2) - 1}{(\sin \psi_0 \cos \psi_0 / \sin \psi_2 \cos \psi_2) + 1} \stackrel{\textcircled{2}}{=} \frac{(0.5 \sin 2\psi_0 / 0.5 \sin 2\psi_2) - 1}{(0.5 \sin 2\psi_0 / 0.5 \sin 2\psi_2) + 1} \\
 &\stackrel{\textcircled{3}}{=} \frac{(\sin 2\psi_0 / \sin 2\psi_2) - 1}{(\sin 2\psi_0 / \sin 2\psi_2) + 1} = \frac{\sin 2\psi_0 - \sin 2\psi_2}{\sin 2\psi_0 + \sin 2\psi_2} \stackrel{\textcircled{4}}{=} \frac{2 \cos \frac{2(\psi_0 + \psi_2)}{2} \sin \frac{2(\psi_0 - \psi_2)}{2}}{2 \sin \frac{2(\psi_0 + \psi_2)}{2} \cos \frac{2(\psi_0 - \psi_2)}{2}} = \frac{\cos(\psi_0 + \psi_2) \sin(\psi_0 - \psi_2)}{\sin(\psi_0 + \psi_2) \cos(\psi_0 - \psi_2)} \\
 &\stackrel{\textcircled{5}}{=} \left(\frac{\sin(\psi_0 + \psi_2)}{\cos(\psi_0 + \psi_2)} \right)^{-1} \frac{\sin(\psi_0 - \psi_2)}{\cos(\psi_0 - \psi_2)} = \frac{\tan(\psi_0 - \psi_2)}{\tan(\psi_0 + \psi_2)}
 \end{aligned}$$

ψ_2 を ψ_1 で表すと

$$r_p \stackrel{\textcircled{6}}{=} \frac{K_2 \cos \psi_0 - K_0 \cos \psi_2}{K_2 \cos \psi_0 + K_0 \cos \psi_2} = \frac{K_2 \cos \psi_0 - K_0 \sqrt{1 - \sin^2 \psi_2}}{K_2 \cos \psi_0 + K_0 \sqrt{1 - \sin^2 \psi_2}} \stackrel{\textcircled{7}}{=} \frac{K_2 \cos \psi_0 - K_0 \sqrt{1 - (K_0/K_2)^2 \sin^2 \psi_0}}{K_2 \cos \psi_0 + K_0 \sqrt{1 - (K_0/K_2)^2 \sin^2 \psi_0}} \stackrel{\textcircled{8}}{=} \frac{K_2^2 \cos \psi_0 - K_0 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}{K_2^2 \cos \psi_0 + K_0 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}$$

- ①は分母と分子に $1/\cos \psi_2$ を掛ける
- ②は2倍角の公式を使用
- ③は分母と分子に $\sin 2\psi_2$ を掛ける
- ④は和・差を積に直す公式を使用
- ⑤は $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$ を使用
- ⑥は $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使用
- ⑦はスネルの法則を適用
- ⑧は分母と分子に K_2 を掛ける

式2と式3から E_{s2} を消去して、s偏光の振幅反射率を計算

$$K_0(E_{s0} - E_{s1}) \cos \psi_0 = K_2(E_{s0} + E_{s1}) \cos \psi_2$$

$$K_0 E_{s0} \cos \psi_0 - K_0 E_{s1} \cos \psi_0 = K_2 E_{s0} \cos \psi_2 + K_2 E_{s1} \cos \psi_2$$

$$K_0 E_{s0} \cos \psi_0 - K_0 E_{s1} \cos \psi_0 - K_2 E_{s0} \cos \psi_2 - K_2 E_{s1} \cos \psi_2 = 0$$

$$(K_0 \cos \psi_0 - K_2 \cos \psi_2) E_{s0} - (K_0 \cos \psi_0 + K_2 \cos \psi_2) E_{s1} = 0$$

$$(K_0 \cos \psi_0 - K_2 \cos \psi_2) E_{s0} = (K_0 \cos \psi_0 + K_2 \cos \psi_2) E_{s1}$$

$$(K_0 \cos \psi_0 - K_2 \cos \psi_2) = \frac{(K_0 \cos \psi_0 + K_2 \cos \psi_2) E_{s1}}{E_{s0}}$$

$$\frac{K_0 \cos \psi_0 - K_2 \cos \psi_2}{K_0 \cos \psi_0 + K_2 \cos \psi_2} = \frac{E_{s1}}{E_{s0}} = r_s$$

K_0 、 K_2 、 ψ_0 、 ψ_2 の間には、 $K_0 \sin \psi_0 = K_2 \sin \psi_2$ (スネルの法則) が成立するので、

$$\begin{aligned}
 r_s &= \frac{K_0 \cos \psi_0 - K_2 \cos \psi_2}{K_0 \cos \psi_0 + K_2 \cos \psi_2} = \frac{K_0 \cos \psi_0 - K_0 (\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_2}{K_0 \cos \psi_0 + K_0 (\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_2} = \frac{\cos \psi_0 - (\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_2}{\cos \psi_0 + (\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_2} \\
 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{(\cos \psi_0 / \cos \psi_2) - (\sin \psi_0 / \sin \psi_2)}{(\cos \psi_0 / \cos \psi_2) + (\sin \psi_0 / \sin \psi_2)} = \frac{\frac{\sin \psi_2 \cos \psi_0 - \cos \psi_2 \sin \psi_0}{\cos \psi_2 \sin \psi_2}}{\frac{\sin \psi_2 \cos \psi_0 + \cos \psi_2 \sin \psi_0}{\cos \psi_2 \sin \psi_2}} = \frac{\sin \psi_2 \cos \psi_0 - \cos \psi_2 \sin \psi_0}{\sin \psi_2 \cos \psi_0 + \cos \psi_2 \sin \psi_0} \\
 &\stackrel{\textcircled{2}}{=} \frac{\sin(\psi_2 - \psi_0)}{\sin(\psi_2 + \psi_0)} = \frac{\sin(-(\psi_0 - \psi_2))}{\sin(\psi_0 + \psi_2)} = -\frac{\sin(\psi_0 - \psi_2)}{\sin(\psi_0 + \psi_2)}
 \end{aligned}$$

ψ_2 を ψ_1 で表すと

$$r_s = \frac{K_0 \cos \psi_0 - K_2 \cos \psi_2}{K_0 \cos \psi_0 + K_2 \cos \psi_2} \stackrel{\textcircled{3}}{=} \frac{K_0 \cos \psi_0 - K_2 \sqrt{1 - \sin^2 \psi_2}}{K_0 \cos \psi_0 + K_2 \sqrt{1 - \sin^2 \psi_2}} \stackrel{\textcircled{4}}{=} \frac{K_0 \cos \psi_0 - K_2 \sqrt{1 - (K_0/K_2)^2 \sin^2 \psi_0}}{K_0 \cos \psi_0 + K_2 \sqrt{1 - (K_0/K_2)^2 \sin^2 \psi_0}} \stackrel{\textcircled{5}}{=} \frac{K_0 \cos \psi_0 - \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}{K_0 \cos \psi_0 + \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0}}$$

①は分母と分子に $1/\cos \psi_2$ を掛ける

②は加法定理を使用

③は $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使用

④はスネルの法則を適用

⑤は K_2 をルートの中に入れる

(3) 境界面における電界と磁界連続性から振幅透過率を導出

$$(E_{p0} - E_{p1}) \cos \psi_0 = E_{p2} \cos \psi_2 \quad \dots\dots\dots \text{式 1}$$

$$E_{s0} + E_{s1} = E_{s2} \quad \dots\dots\dots \text{式 2}$$

$$K_0(E_{s0} - E_{s1}) \cos \psi_0 = K_2 E_{s2} \cos \psi_2 \quad \dots\dots \text{式 3}$$

$$K_0(E_{p0} + E_{p1}) = K_2 E_{p2} \quad \dots\dots\dots \text{式 4}$$

式 1 と式 4 から E_{p1} を消去して、p 偏光の透過率を計算

$$E_{p0} - E_{p1} = E_{p2} \frac{\cos \psi_2}{\cos \psi_0} \quad \dots\dots\dots \text{式 1'}$$

$$E_{p0} + E_{p1} = \frac{K_2}{K_0} E_{p2} \quad \dots\dots\dots \text{式 4'}$$

式 1' と式 4' を加算

$$2E_{p0} = E_{p2} \left(\frac{\cos \psi_2}{\cos \psi_0} + \frac{K_2}{K_0} \right)$$

$$2 = \frac{E_{p2}}{E_{p0}} \left(\frac{\cos \psi_2}{\cos \psi_0} + \frac{K_2}{K_0} \right) = \frac{E_{p2}}{E_{p0}} \left(\frac{K_0 \cos \psi_2 + K_2 \cos \psi_0}{K_0 \cos \psi_0} \right)$$

$$\frac{E_{p2}}{E_{p0}} = \frac{2K_0 \cos \psi_0}{K_0 \cos \psi_2 + K_2 \cos \psi_0} = t_p$$

K_0 、 K_2 、 ψ_0 、 ψ_2 の間には、 $K_0 \sin \psi_0 = K_2 \sin \psi_2$ (スネルの法則) が成立するので、

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{2K_0 \cos \psi_0}{K_0 \cos \psi_2 + K_2 (\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_0} = \frac{2 \cos \psi_0}{\cos \psi_2 + (\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_0} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2 \cos \psi_0 \sin \psi_2}{\cos \psi_2 \sin \psi_2 + \sin \psi_0 \cos \psi_0} = \frac{2 \cos \psi_0 \sin \psi_2}{0.5 \sin 2\psi_2 + 0.5 \sin 2\psi_0} \stackrel{\textcircled{2}}{=} \\ &= \frac{2 \cos \psi_0 \sin \psi_2}{0.5 (\sin 2\psi_2 + \sin 2\psi_0)} = \frac{2 \cos \psi_0 \sin \psi_2}{0.5 \left(2 \sin \left(\frac{2\psi_2 + 2\psi_0}{2} \right) \cos \left(\frac{2\psi_2 - 2\psi_0}{2} \right) \right)} = \frac{2 \cos \psi_0 \sin \psi_2}{\sin(\psi_2 + \psi_0) \cos(\psi_2 - \psi_0)} = \frac{2 \sin \psi_2 \cos \psi_0}{\sin(\psi_0 + \psi_2) \cos(\psi_0 - \psi_2)} \stackrel{\textcircled{3}}{=} \\ &= \frac{2 \sin \psi_2 \cos \psi_0}{\sin(\psi_0 + \psi_2) \cos(\psi_0 - \psi_2)} \end{aligned}$$

ψ_2 を ψ_1 で表すと

$$t_p = \frac{2K_0 \cos \psi_0}{K_0 \cos \psi_2 + K_2 \cos \psi_0} \stackrel{\textcircled{4}}{=} \frac{2K_0 \cos \psi_0}{K_0 \sqrt{1 - \sin^2 \psi_2} + K_2 \cos \psi_0} \stackrel{\textcircled{5}}{=} \frac{2K_0 \cos \psi_0}{K_0 \sqrt{1 - (K_0/K_2)^2 \sin^2 \psi_0} + K_2 \cos \psi_0} \stackrel{\textcircled{6}}{=} \frac{2K_0 K_2 \cos \psi_0}{K_0 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0} + K_2^2 \cos \psi_0}$$

- ①は分母と分子に $\sin \psi_2$ を掛ける
- ②は積を和と差に直す公式を使用
- ③は和と差を積に直す公式を使用
- ④は $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使用
- ⑤はスネルの法則を適用
- ⑥は分母と分子に K_2 を掛ける

式 2 と式 3 から E_{p1} を消去して、s 偏光の透過率を計算

$$K_0(E_{s0} - (E_{s2} - E_{s0})) \cos \psi_0 = K_2 E_{s2} \cos \psi_2$$

$$K_0(2E_{s0} - E_{s2}) \cos \psi_0 = K_2 E_{s2} \cos \psi_2$$

$$2K_0 E_{s0} \cos \psi_0 = K_2 E_{s2} \cos \psi_2 + K_0 E_{s2} \cos \psi_0 = E_{s2}(K_2 \cos \psi_2 + K_0 \cos \psi_0)$$

$$\frac{2K_0 \cos \psi_0}{K_2 \cos \psi_2 + K_0 \cos \psi_0} = \frac{E_{s2}}{E_{s0}} = t_s$$

K_0 、 K_2 、 ψ_0 、 ψ_2 の間には、 $K_0 \sin \psi_0 = K_2 \sin \psi_2$ (スネルの法則) が成立するので、

$$t_s = \frac{2K_0 \cos \psi_0}{K_0(\sin \psi_0 / \sin \psi_2) \cos \psi_2 + K_0 \cos \psi_0} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2K_0 \cos \psi_0 \sin \psi_2}{K_0 \sin \psi_0 \cos \psi_2 + K_0 \cos \psi_0 \sin \psi_2} = \frac{2 \cos \psi_0 \sin \psi_2}{\sin \psi_0 \cos \psi_2 + \cos \psi_0 \sin \psi_2}$$

$$\stackrel{\textcircled{2}}{=} \frac{2 \cos \psi_0 \sin \psi_2}{0.5(\sin(\psi_0 + \psi_2) + \sin(\psi_0 - \psi_2)) + 0.5(\sin(\psi_0 + \psi_2) - \sin(\psi_0 - \psi_2))} = \frac{2 \sin \psi_2 \cos \psi_0}{\sin(\psi_0 + \psi_2)}$$

ψ_2 を ψ_1 で表すと

$$t_s = \frac{2K_0 \cos \psi_0}{K_2 \cos \psi_2 + K_0 \cos \psi_0} \stackrel{\textcircled{3}}{=} \frac{2K_0 \cos \psi_0}{K_2 \sqrt{1 - \sin^2 \psi_2} + K_0 \cos \psi_0} \stackrel{\textcircled{4}}{=} \frac{2K_0 \cos \psi_0}{K_2 \sqrt{1 - (K_0/K_2)^2 \sin^2 \psi_0} + K_0 \cos \psi_0} \stackrel{\textcircled{5}}{=} \frac{2K_0 \cos \psi_0}{\sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \psi_0} + K_0 \cos \psi_0}$$

①は分母と分子に $\sin \psi_2$ を掛ける

②は積を和と差に直す公式を使用

③は $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を使用

④はスネルの法則を適用

⑤は K_2 をルートの中に入れる

(4) 光のエネルギー反射率とエネルギー透過率

光のエネルギーは電場の振幅の 2 乗（正確には電場と磁場の振幅の積）に比例するため、エネルギー反射率 R とエネルギー透過率 T は、振幅反射率の 2 乗から求められる。ただし、 T を求める際は、入射側と透過側との屈折率の違いと角度変化に起因する係数が掛かる。

$$T_{p,s} = \frac{n_2 \cos \psi_2}{n_1 \cos \psi_0} t_{p,s}^2 = \frac{\sin \psi_0 \cos \psi_2}{\sin \psi_2 \cos \psi_0} = \frac{\tan \psi_0}{\tan \psi_2} t_{p,s}^2$$

$$R_{p,s} = r_{p,s}^2$$

- n_1 : 入射側媒質の屈折率
- n_2 : 透過側媒質の屈折率
- ψ_0 : 入射角
- ψ_2 : 屈折角
- $t_{p,s}$: p 偏光と s 偏光の振幅透過率
- $r_{p,s}$: p 偏光と s 偏光の振幅反射率

エネルギー反射率とエネルギー透過率の計算例を図 3-16 と図 3-17 に示す。

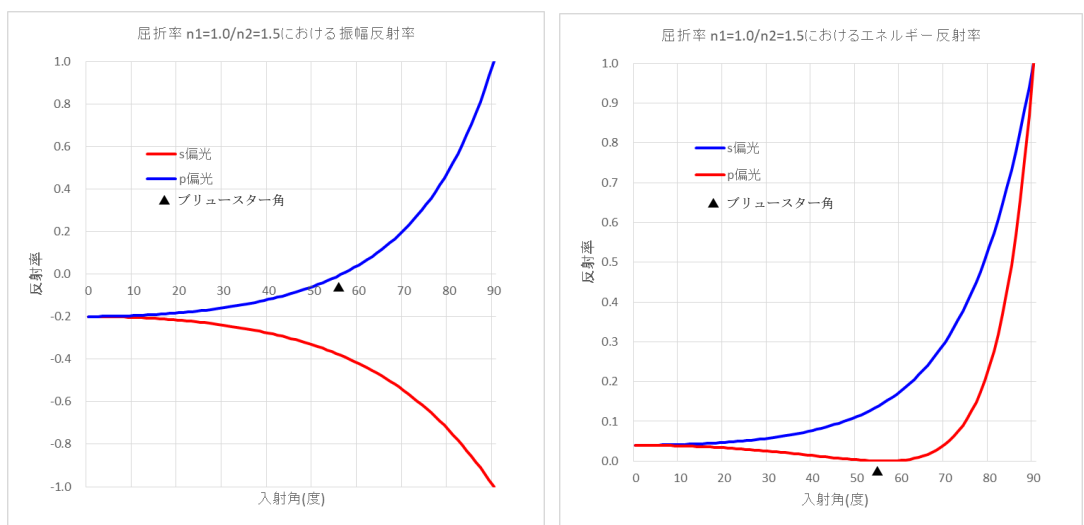


図 3-16 屈折率 $n_1=1.0/n_2=1.5$ における反射率

$\psi_0 + \psi_2 = \frac{\pi}{2}$ のとき、 \tan が発散するため、 $R_p = 0$ となり、反射光は s 偏光のみとなる。このときの入射角をブリュースター角と言う。逆に、 R_p, R_s 共に 1 となり、入射光が全て反射される現象を全反射と言い、全反射を起こす最も小さな角度を臨界角と言う。全反射は $n_1 > n_2$ のときに起きる現象である。

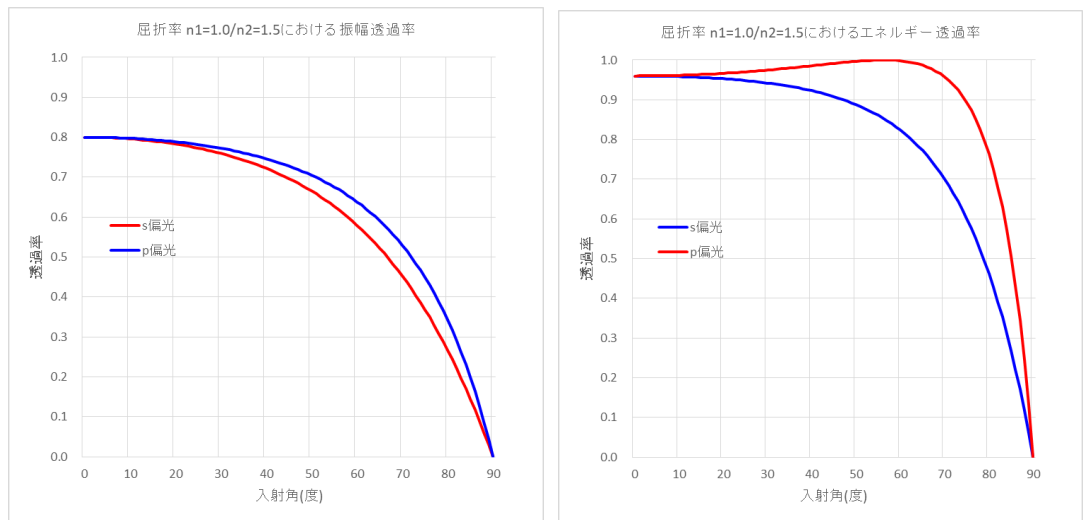


図 3-17 屈折率 $n_1=1.0/n_2=1.5$ における透過率

(5) 光の反射率と位相の変化

電界ベクトル E と磁界ベクトル H は同位相で、波数ベクトル K に垂直な面内で直交し、 (E, H, K) で右手系を成している。このため、垂直入射を考えると、反射で電界の向きが変わる（固定端的）なら、磁界の向きは変わらない（自由端的）ことになる。

$n_1 < n_2$ の場合、 s ベクトルの向きは変わらないが、 s 成分の符号が反転する。 p ベクトルは、波数ベクトル k の変化に伴って向きが変わる。 p 成分の符号は、入射角がブリュースター角より小さい角度では変わらないが、より大きい角度では反転する。 $n_2 < n_1$ の場合、 s 成分と p 成分の符号の変化は逆になる。

$$\frac{E_{s1}}{E_{s0}} = -\frac{\sin(\psi_0 - \psi_2)}{\sin(\psi_0 + \psi_2)}, \quad \frac{E_{p1}}{E_{p0}} = \frac{\tan(\psi_0 - \psi_2)}{\tan(\psi_0 + \psi_2)}$$

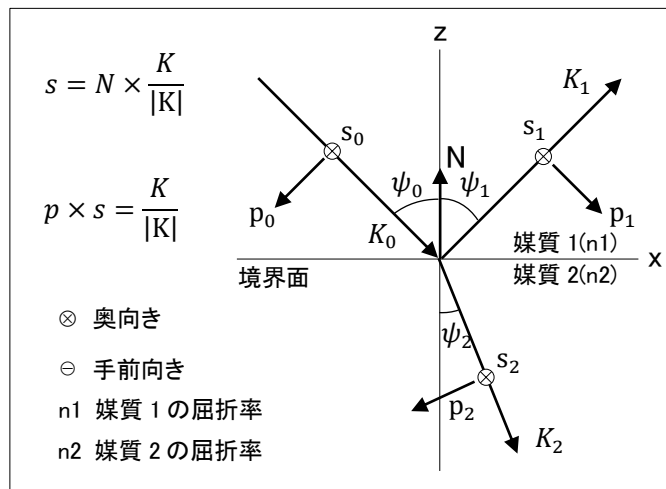


図 3-18 光の反射率と電界ベクトル E と磁界ベクトル H

(6) 光の全反射とエバネッセント波

屈折率が異なる媒質が接した状態で、光が屈折率の大きい媒質から小さい媒質への進むとき、入射角が臨界角より小さいときはスネルの法則に従って透過光は屈折するが、入射角が臨界角になると、出射角が 90 度となり、透過光は境界内に沿って進む。入射角が臨界角を越えると、透過せず、赤線のように全反射が起きる（屈折光は全て消失し、反射光のみとなる）。このとき、媒質 1 の表面には伝搬しない電磁波であるエバネッセント波が境界から波長程度の範囲に生じる。

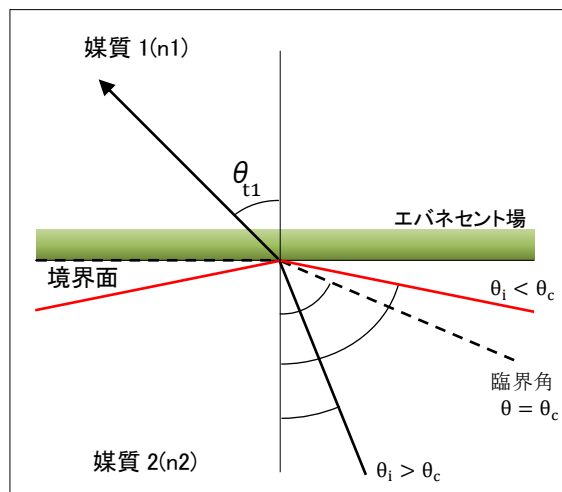


図 3-19 光の全反射率とエバネッセント場

入射角と屈折角の間にはスネル法則が成り立っているため、臨界角を求めるのは容易である。

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_c} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{入射角=臨界角のときの出射角は 90 度なので、} \sin \theta = \frac{n_2}{n_1} \text{ となり、}$$

$$\text{臨界角} = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \text{ となる。}$$

入射角 \geq 臨界角で反射率が 1 になる理屈

$$r_p = \frac{K_2^2 \cos \theta_i - K_0 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \theta_i}}{K_2^2 \cos \theta_i + K_0 \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \theta_i}} = \frac{\frac{K_2^2}{K_0^2} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{K_2^2}{K_0^2} - \frac{K_0^2}{K_0^2} \sin^2 \theta_i}}{\frac{K_2^2}{K_0^2} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{K_2^2}{K_0^2} - \frac{K_0^2}{K_0^2} \sin^2 \theta_i}} = \frac{\overbrace{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_i - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}^{\textcircled{1}}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_i - j \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_i + j \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

$$r_s = \frac{K_0 \cos \theta_i - \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \theta_i}}{K_0 \cos \theta_i + \sqrt{K_2^2 - K_0^2 \sin^2 \theta_i}} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{K_2^2}{K_0^2} - \frac{K_0^2}{K_0^2} \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{K_2^2}{K_0^2} - \frac{K_0^2}{K_0^2} \sin^2 \theta_i}} = \frac{\overbrace{\cos \theta_i - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}^{\textcircled{2}}}{\cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}} = \frac{\cos \theta_i - j \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos \theta_i + j \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

①と②に臨界角 ($\sin \theta = \frac{n_2}{n_1}$) を代入すると、

$$r_p = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = 1$$

$$r_s = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}} = 1 \text{ となる。}$$

入射角が臨界角を越えると、 $\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}$ が虚数となり、 r_p 、 r_s 共に分母・分子が複素数で、 $\frac{\alpha - j\beta}{\alpha + j\beta}$ の形になり、その絶対値は常に 1 となる。

透過率については入射角 \geq 臨界角の条件で、媒質 2 への侵入がなくなる（スネルの法則から屈折角の解なしとなる）ので 0 と考えてよさそうである。

全反射における反射光の位相

s 偏光は入射角 \leq 臨界角の条件では、位相のずれはない。入射角が臨界角より大きくなるにつれて位相のずれが大きくなり、入射角が 90 度に近づくにつれ、位相反転に近づく。p 偏光は入射角が臨界角より小さい角度でブリュースター角を通過するので入射角 = 臨界角の条件では、位相が反転している。入射角が臨界角より大きくなるにつれて位相のずれが小さくなり、入射角が 90 度に近づくにつれ、位相のずれなしに近づく。

s 偏光、p 偏光とも全反射における反射率は $\frac{\alpha - j\beta}{\alpha + j\beta}$ の形になっている。

$$\frac{\alpha - j\beta}{\alpha + j\beta} = \frac{\alpha - j\beta}{\alpha + j\beta} \frac{\alpha - j\beta}{\alpha - j\beta} = \frac{(\alpha - j\beta)^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2) - 2j\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$(\alpha^2 - \beta^2) - 2j\alpha\beta$ は複素平面上のベクトル、 $\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$ はそのベクトルの大きさの係数なので、

偏角 δ は、

$$\tan \delta = \frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{-2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\right)$$

となる。

p 偏光
$\alpha = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \theta_i, \quad \beta = \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$
s 偏光
$\alpha = \cos \theta_i, \quad \beta = \sqrt{\sin^2 \theta_i - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$

媒質 1 の屈折率=1.5、媒質 2 の屈折率=1.0（臨界角 \approx 41.81 度）の場合の全反射が起因する位相のずれを図 3-20 に示す。（反射のタイミングのずれが発生すると考えてよさそうである。）

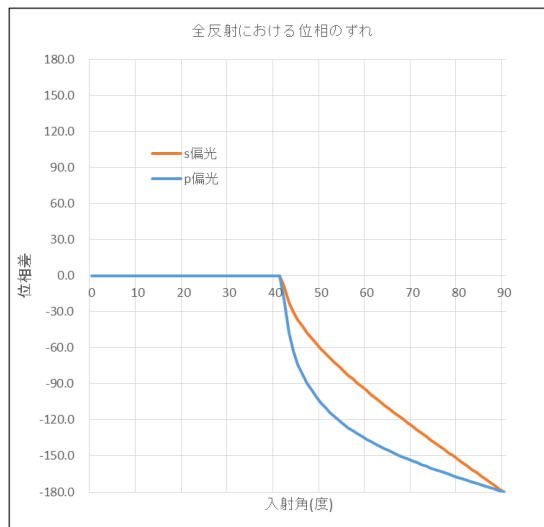


図 3-20 全反射が起因する位相のずれ

3.9 拡散反射

拡散反射は非金属表面付近で起きる光の反射のうち、界面で発生する鏡面反射を除いた成分のことである。拡散反射は鏡面反射に比べて反射角に依存せず、多様な方向に同程度の光度を放つのが特徴である。金属表面では自由電子が界面下への光の侵入を妨ぐため、拡散反射は生じない。拡散反射は、界面下の十分小さい範囲で、入射光が多重反射、透過、散乱する様子と考えられる。吸光のある材質ではその過程で特定の波長の光の強度が弱まる。よって拡散反射スペクトルと透過スペクトルは類似したものになる。またゼリーやロウのように光を比較的多く透過する材質では、光が内部で大きく拡散、散乱し、入射点から離れた点から出てくる場合がある。

3.10 拡散反射モデル

(1) ランバート反射

ランバート反射は反射面をどの角度から見ても輝度が一定となる最も単純な近似モデルである。

計算式

$$L_r = \frac{\rho}{\pi} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{n}) L_i = \frac{\rho}{\pi} \cos \theta L_i$$

L_r : 拡散反射光の放射輝度

ρ : 拡散反射率(物体色)

\mathbf{l} : 入射光の正規化ベクトル

L_i : 入射光の放射輝度

\mathbf{n} : 反射面の正規化法線ベクトル

θ : \mathbf{l} と \mathbf{n} のなす角

(2) オーレン・ネイヤー反射

オブジェクトの表面に微小な平面(マイクロファセット)を仮定(表面の粗さを考慮)することで、粗面の拡散反射の反射率を近似する。コンクリート・石膏・砂と言った、自然界で広く見られる物体の表面を正確に表現できる。

計算式

$$L_r = \frac{\rho}{\pi} \cos \theta_i (A + (B \times \max[0, \cos(\varphi_r - \varphi_i)] \sin \alpha \tan \beta)) L_i$$

L_r : 拡散反射光の放射輝度、 L_i : 入射光の放射輝度、

$$A = 1 - 0.5 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.33} \quad , \quad B = 0.45 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09} \quad ,$$

$$\alpha = \max(\theta_i, \theta_r) \quad , \quad \beta = \min(\theta_i, \theta_r) \quad ,$$

ρ : 拡散反射率(物体色)、

σ^2 : ファセットの傾斜の分散(σ は標準偏差)

$\sigma = 0$ (全ファセットが同一平面)では、 $A = 1$ 、 $B = 0$ となり、ランバート反射となる。

$$L_r = \frac{\rho}{\pi} \cos \theta L_i$$

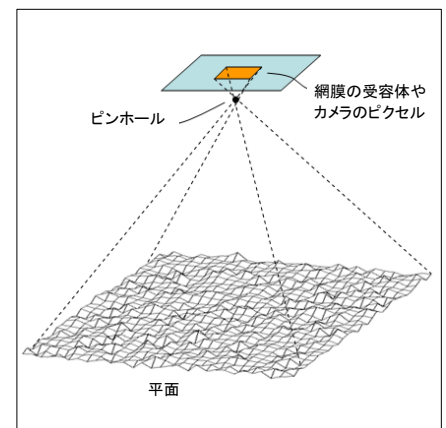


図 3-21 マイクロファセット

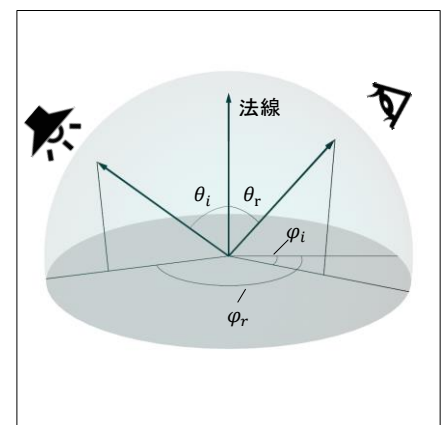


図 3-22 角度パラメータ θ と ϕ

3.11 古典的なフォン反射モデル

このモデルは、「局所的な」反射モデルであり、「鏡面反射」、「拡散反射」、「環境反射」の合成として定義されている。(環境反射は反射した光の減衰を補正するために加えられている。)

計算式

$$I_r = k_a i_a + \sum_{lights} (k_d (L \cdot N) i_d + k_s (R \cdot V)^\alpha i_s)$$

- | | | |
|--|---|----------|
| <ul style="list-style-type: none"> i_s : 光源の鏡面反射成分 i_d : 光源の拡散反射成分 i_a : 環境光成分 k_s : 鏡面反射係数 k_d : 拡散反射係数(ランバート反射) k_a : 環境反射係数(環境光の反射率) α : 光沢度 | } | 通常 RGB 値 |
| <ul style="list-style-type: none"> N : 反射面の法線ベクトル L : 光源への方向ベクトル R : 光線の反射方向ベクトル V : 視点への方向ベクトル | } | 単位ベクトル |
- より滑らかな表面ほど大きな値。
光沢度が大きいほど鏡面ハイライトが小さく強くなる。

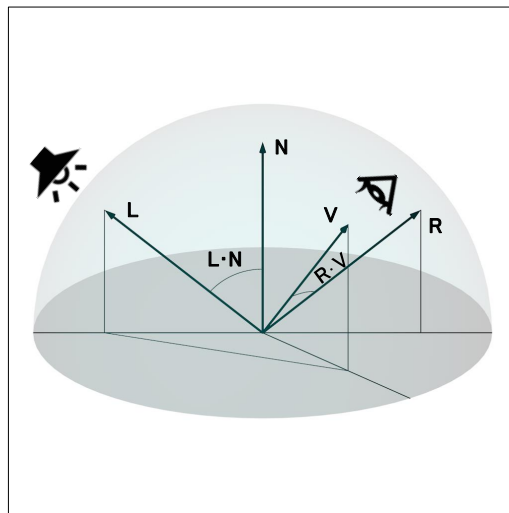
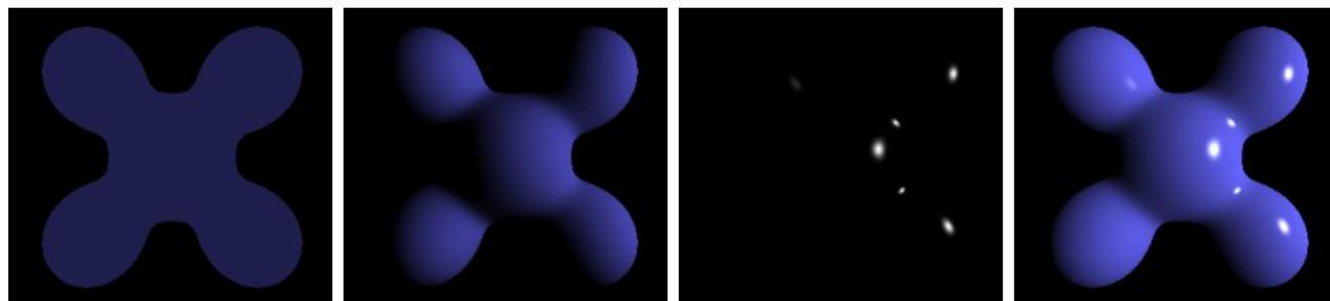


図 3-23 ベクトル パラメータ

この式をグラフィカルに表現すると以下のようなになる。



環境光 + 拡散反射 + 鏡面反射 = Phong 反射

(Brad Smith - 投稿者自身による作品, CC 表示-継承 3.0,

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1030364> による)

3.12 CV と CG における反射モデル

物体表面で観測される反射光の振る舞いは、材質や表面の微細形状に依存する。照明方向や観測方向を変化させたときの物体表面の明るさの変化を表現、または解析するため幾つかの反射モデルが考案されている。それらの内の不透明物体で生ずる反射のモデル(BRDF)と、半透明物体で生じる表面下散乱のモデル(BSSRDF)について確認する。

3.12.1 BRDF

物体表面の反射特性は、双方向反射率分布関数(BRDF: Bi-directional Reflectance Distribution Function)によって表現される。物体表面上のある点 x における BRDF は、図 3-24 に示すように入射と反射の双方向に依存し、照明方向 (θ_l, φ_l) からの入射光の強さ(イラディアン)に対する観測方向 (θ_v, φ_v) への反射光の強さ(ラディアン)の比として定義される。

厳密には BRDF は波長にも依存するが、画像の生成や解析において各波長ごとの反射率は冗長であることが多いため、赤(R)、緑(G)、青(B)のチャンネルごとに BRDF を定義し、次式のように四つの角度をパラメータとするのが一般的である。

$$f_{BRDF}(x, \theta_l, \varphi_l, \theta_v, \varphi_v)$$

なお、図 3-25 に示す照明方向 L と観測方向 V を固定し、対象物体を観測面の法線 N を軸に回転させたとき、反射率が変化するものを異方性反射、変化しないものを等方性反射と呼ぶ。異方性反射は織物やヘアライン加工された金属などで見られる比較的特殊な反射である。一方、等方性反射は、その性質から方位角が相対角 $(\varphi = \varphi_r - \varphi_i)$ で決まるため、次式のように三つの角度パラメータでの記述が可能である。

$$f_{BRDF}^{isotropic}(x, \theta_l, \theta_v, \varphi)$$

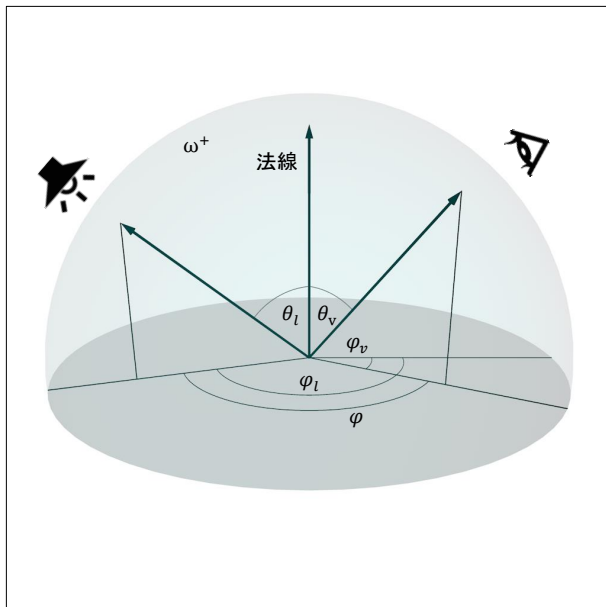


図 3-24 照明・観測方向を表す角度パラメータ

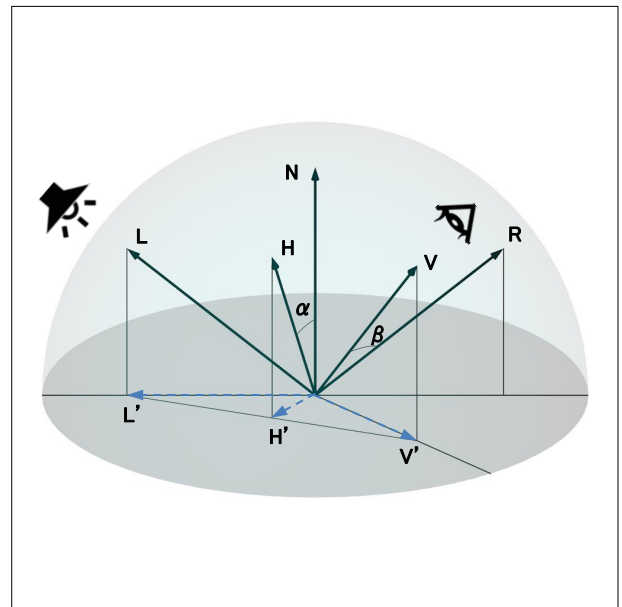


図 3-25 反射モデルに用いられるベクトル

BRDF は、反射という物理現象を表現するため、次に挙げる二つの条件を満たす。

条件-1：相反性（レシプロシティ）

入射方向と反射方向を入れ替えても値が変化しない。すなわち、

$$f_{BRDF}(x, L, V) = f_{BRDF}(x, V, L)$$

条件-2: エネルギー保存の法則

反射光の総和が、入射光の総和を越えてはならない。すなわち、

$$\int_{\omega^+} f_{BRDF}(x, L, V) (N \cdot L) dL \leq 1.0$$

ω^+ ：観測点から見える半球面

これらの性質をもつ BRDF を具現化したものが反射モデルである。なお、BRDF はイラディアンسに対するラディアンスの比として定義され、照明方向と法線方向の角度関係を含めず、純粹に表面の材質のみを反映する関数である。したがって、反射光の強度を算出する場合は $\cos \theta_l (= N \cdot L)$ を乗ずる必要がある。一方、反射モデルは直感的な取扱いを容易にするために、法線の向きを表す余弦の項も含めるのが一般的である。多くの反射モデルは反射光を拡散反射成分と鏡面反射成分の和として近似する³。

次に具体的な反射モデルを示す。

(1) 拡散反射モデル

拡散反射は、入射光が表面層内部で乱反射することで生ずる成分であり、観測方向に依存せず、あらゆる方向に均一の強度で観測される。そのため、拡散反射の BRDF は角度パラメータに依存せず定数となる。ざらざらした石膏などで観測される反射光は、ほぼ拡散反射成分だけを含む。CV 分野ではランバート反射モデルが広く用いられている。CG 分野ではランバートモデルと、より現実に近い反射を表現できるオーレン・ネイヤー反射モデルが用いられている。

(A) ランバート反射モデル

拡散反射の強さは照明方向と法線方向のなす角の余弦に比例すると仮定するモデルである。

$$i = \rho_d \max(0, N \cdot L) = \rho_d \max(0, \cos \theta_l)$$

ρ_d ：拡散反射率(ディフューズ アルベド：物体色)

(B) オーレン・ネイヤー反射モデル

観測面に微小な平面(マイクロファセット)を仮定(表面の粗さを考慮)することで、自己遮へいや自己陰影などの影響を考慮した反射モデルである。

$$i = \rho \cos \theta_l (A + (B \times \max[0, \cos(\varphi_v - \varphi_l)] \sin \alpha \tan \beta))$$

$$\cos \theta_l = N \cdot L, \quad \cos \theta_v = N \cdot V$$

³ 初期の反射モデルでは環境光成分も定数として含めていたが、大域照明による間接光の表現が一般的になってからは利用されなくなった。

$$\cos(\varphi_v - \varphi_l) = \frac{V' \cdot L'}{|V'| |L'|}$$

但し、 V' と L' は V と L を観測面へ投影したベクトル

$$V' = V - (N \cdot V)N, \quad L' = L - (N \cdot L)N$$

$$A = 1 - 0.5 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.33}, \quad B = 0.45 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 0.09},$$

$$\alpha = \max(\theta_l, \theta_v), \quad \beta = \min(\theta_l, \theta_v),$$

ρ : 拡散反射率(物体色)、

σ^2 : ファセットの傾斜の分散(σ は標準偏差)

(2) 鏡面反射モデル

鏡面反射は、入射光が大気と表面層との境界において反射することで生ずる成分であり、正反射方向付近で強く観測される。なめらかな表面で強く観測され、ハイライトとも呼ばれる。鏡面反射は正確なモデル化が難しいことから、多くの反射モデルが考案されている。

(A) Phong モデル

フォン モデルは、経験に基づく古典的なモデルであり、次式のように照明方向の正反射方向 \mathbf{R} と観測方向 \mathbf{V} のなす角 β の余弦のべき乗として近似するモデルである。

$$i = \rho_s \cos^n \beta$$

n : 滑らかさ

より滑らかな表面ほど大きな値。

滑らかさが大きいほど鏡面ハイライトが小さく強くなる。

エネルギー保存の法則を満たす保証がないなどの性質は気を付ける必要はあるが、簡単に計算できるため、計算機能力が低かった初期の CG でよく用いられた。

(B) Torrance-Sparrow モデル

物体表面が微小面の集合で構成されていると仮定し、微小面による隠蔽やフレネル反射を考慮することでオフ スペキュラー⁴を表現できる物理ベースモデルである。

光学の分野で考案された Torrance-Sparrow モデルは、後に Blinn によって簡潔に再定義され、CG に応用された。Blinn の定式化によれば、鏡面反射の強度は次式で表現される。

$$i = \rho_s \frac{DGF}{N \cdot V}$$

ρ_s : 鏡面反射率

D : 法線分布項 (物体表面の法線のばらつきを表現する。)

G : 幾何減衰項 (小面の凹凸によって生ずる自己遮へいと自己陰影を表現する。)

F : フレネル項 (屈折率や光の入射角度により反射率が変わるフレネル反射を表現する。)

⁴ 凹凸がある物体表面における鏡面反射は、正反射方向から少しずれた角度でピークをもつ性質があり、これをオフ スペキュラーと呼ぶ。

(ア) 法線分布項

法線分布項 D は、照明方向と観測方向の二等分方向(ハーフ ベクトル) H と、法線方向 N のなす角 α の確率密度関数を表す。すなわち、ハーフ ベクトルに対して、微小面の法線がどれだけばらついているかを表す。

具体的な法線分布項を表す微小面法線分布関数を以下に示す。

- 余弦分布関数

$$D_1 = \cos^{n_1} \alpha$$

n_1 : 滑らかさ

- ガウス分布関数

$$D_2 = e^{-(\alpha n_2)^2}$$

n_2 : 滑らかさ

- GGX 分布関数

$$D_3 = \frac{n_3^2}{(\cos^2 \alpha (n_3^2 - 1) + 1)^2}$$

n_3 : 粗さの二乗

(イ) 幾何減衰項

入射光が遮られるシャドウイングと、反射光が遮られるマスキングを考慮する関数である。照明方向もしくは観測方向が物体の接平面に近づくほど減衰が大きくなり、次式のように定式化される。

$$G = \min \left(1, \frac{2(N \cdot H)(N \cdot V)}{(V \cdot H)}, \frac{2(N \cdot H)(N \cdot L)}{(V \cdot H)} \right)$$

(ウ) フレネル項

観測面がどの程度反射するかを表す関数である。照明方向もしくは観測方向が物体の接平面に近づくほど強くなり、次式のような近似式によって定式化される⁵。

$$F = \frac{1(g-c)^2}{2(g+c)^2} \left(1 + \frac{(c(g+c)-1)^2}{(c(g-c)+1)^2} \right)$$

$$c = V \cdot H, \quad g = \sqrt{\eta^2 + c^2} - 1$$

η : 相対屈折率

⁵ 厳密なフレネル反射の計算は複雑であるため、通常はこのような近似式が用いられることが多い。

(C) Cook-Torrance モデル

Torrance-Sparrow モデル中の法線分布項 D を、次式のように絶対強度を直接算出できるベックマン分布で表現したものである。

$$i = F \frac{DG}{(N \cdot V)(N \cdot L)}$$

$$D_4 = \frac{1}{n_4^2 \cos^4 \alpha} e^{-\left(\frac{\tan^2 \alpha}{n_4^2}\right)}$$

$\frac{\tan^2 \alpha}{n_4^2} = \frac{(\cos^2 \alpha)^{-1} - 1}{n_4^2} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{n_4^2 \cos^2 \alpha} = \frac{1 - (N \cdot H)^2}{n_4^2 (N \cdot H)^2}$

n_4^2 : ファセットの傾斜の二乗平均 (n_4 は rms(二乗平均平方根))

n_4 を大きくすると表面が粗くなり、広い分布を生成する。 n_4 を小さくすると滑らかな表面となり、狭い分布を生成し、鏡面反射ハイライトが鋭くなる。

(D) Ward モデル

Torrance-Sparrow モデルの法線分布項 D 項のみを取り出し、反射が線対称となる軸6に水平な方向と垂直な方向に対して別々の表面の粗さ係数を定義できるように拡張して異方性反射を表現できるようにしたモデルである。

$$i = \rho_s \frac{1}{\sqrt{(N \cdot V)(N \cdot L)}} \frac{e^c}{4\pi n_x n_y}$$

$$c = -\tan^2 \alpha \left(\frac{\cos^2 \varphi_h}{n_x^2} + \frac{\sin^2 \varphi_h}{n_y^2} \right)$$

φ_h は中間ベクトルを表面に投影したときの方位角

n_x, n_y : 表面の粗さ係数 ($n_x = n_y$ の場合は、等方性反射となる。)

c の式の三角関数は以下のベクトルの演算に置き換えることができる。

$$c = -\tan^2 \alpha \left(\left(\frac{\cos \varphi_h}{n_x} \right)^2 + \left(\frac{\sin \varphi_h}{n_y} \right)^2 \right)$$

$$= -\tan^2 \alpha \left(\left(\frac{\sin^{-1} \alpha (H - N \sin \alpha) \cdot \vec{x}}{n_x} \right)^2 + \left(\frac{\sin^{-1} \alpha (H - N \sin \alpha) \cdot \vec{y}}{n_y} \right)^2 \right)$$

$$= -\tan^2 \alpha \left(\left(\frac{\sin^{-1} \alpha (H \cdot \vec{x} - N \sin \alpha \cdot \vec{x})}{n_x} \right)^2 + \left(\frac{\sin^{-1} \alpha (H \cdot \vec{y} - N \sin \alpha \cdot \vec{y})}{n_y} \right)^2 \right)$$

$$= -\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{H \cdot \vec{x}}{n_x} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{H \cdot \vec{y}}{n_y} \right)^2 \right)$$

$$= -\left(\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\left(\frac{H \cdot \vec{x}}{n_x} \right)^2 + \left(\frac{H \cdot \vec{y}}{n_y} \right)^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\left(\frac{H \cdot \vec{x}}{n_x} \right)^2 + \left(\frac{H \cdot \vec{y}}{n_y} \right)^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{(H \cdot N)^2} \left(\left(\frac{H \cdot \vec{x}}{n_x} \right)^2 + \left(\frac{H \cdot \vec{y}}{n_y} \right)^2 \right)$$

\vec{x} と \vec{y} は法線ベクトルに対する接ベクトル、従属ベクトル。

内積の分配法則

6 多くの異方性反射は、織物であれば繊維方向、ヘアライン加工された金属であればブラシ方向というように、反射が線対称となる軸をもっている。

3.12.2 BSSRDF

金属以外のほとんどの物体は、物体表面へ入射した光が内部にも到達する半透明の性質をもつ。大理石・皮膚・ミルクが半透明物体の典型例として挙げられるが、プラスチックや木材、野菜や果実、紙や布などの身の回りに存在する物体の多くも半透明の性質をもつ。

不透明物体では図 3-26 のように、ある点 x における入射光と反射光の関係だけを考えればよい。一方、半透明物体では、図 3-27 のように物体表面上のある点 x_i に入射した光は物体の内部で散乱し、物体表面上の別の点 x_o からも出射する。この物体内部での散乱を表面下散乱（サブ サーフェース スキャタリング）という。

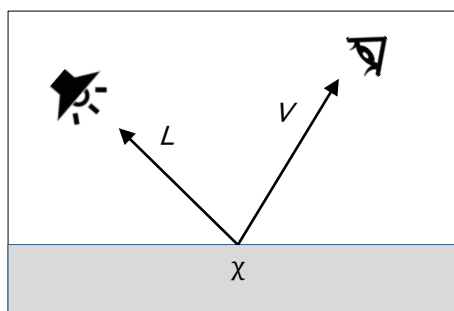


図 3-26 表面での反射

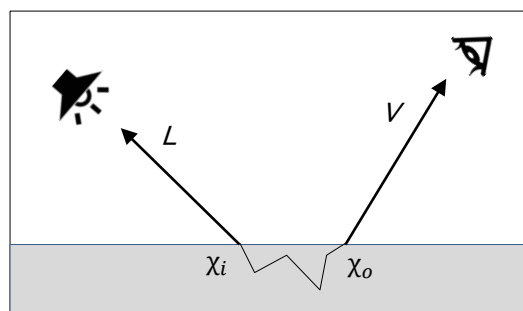


図 3-27 物体内部での表面下散乱

このような半透明物体で生ずる表面下散乱は、双方向散乱面反射率分布関数(BSSRDF: Bidirectional Scattering Surface Reflectance Distribution Function)で表現される。BSSRDFは入射点 x_i に L の方向から入射した光が観測点 x_o において V の方向に出射する率として、次式のように定義される。

$$f_{\text{BSSRDF}}(x_i, L, x_o, V)$$

表面下散乱は、図 3-28 と図 3-29 に示すシングル スキャタリング $f_{\text{BSSRDF}}^{\text{single}}$ とマルチ スキャタリング $f_{\text{BSSRDF}}^{\text{multiple}}$ の和として近似されることが多い。

$$f_{\text{BSSRDF}}(x_i, L, x_o, V) = f_{\text{BSSRDF}}^{\text{single}}(x_i, L, x_o, V) + f_{\text{BSSRDF}}^{\text{multiple}}(x_i, L, x_o, V)$$

シングルスキャタリングは、入射光が物体内部で一度だけ反射することによって生ずる散乱であり、霧や濁った水など、散乱物質の密度が低い媒体で強く観測される。光源から発せられた光が視点に届くまでの光路が一意に定まるため、光路に沿って減衰率を積分することによって計算される。

一方、マルチ スキャタリングは、入射光が物体内部で何度も反射を繰り返すことによって生ずる散乱であり、皮膚や大理石など、散乱物質の密度が高い媒体で強く観測される。反射を繰り返すため、あらゆる方向に同じ強度で散乱する等方散乱の性質(ディフュージョン)をもつ。

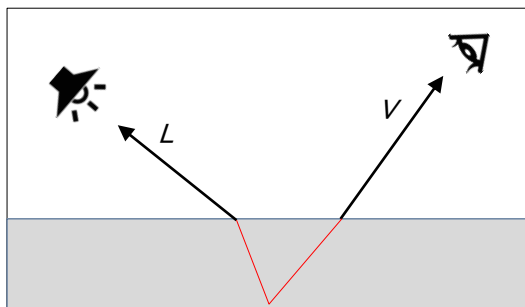


図 3-28 シングルスキャタリング

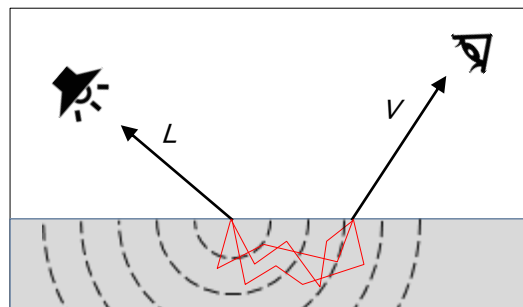


図 3-29 マルチ スキャタリング

マルチ スキャッタリングを厳密に計算するためには、複雑な光路を追跡する必要があり、モンテカルロ レイトレーシング法やフォトンマッピング法などの計算コストの高い手法が用いられてきた。

Jensen はマルチ スキャッタリングを簡単なパラメトリック関数で近似するダイポールモデルを提案した。ダイポールモデルでは、マルチ スキャッタリングは入射光と出射光の方向に依存しないと仮定することで、BSSRDF を次式のように分解する。

$$f_{\text{BSSRDF}}^{\text{multiple}}(\chi_i, L, \chi_o, V) = \frac{1}{\pi} F_t(\eta, V) R_d(\chi_i, \chi_o) F_t(\eta, L)$$

ここで、 η は相対屈折率であり、 F_t は物体表面を光が透過する際のフレネル係数を表す項である。また、 $R_d(\chi_i, \chi_o)$ は、 χ_i に入射した光が χ_o に到達する際の減衰を表す散乱項であり、2 点間の距離 $r = \|\chi_o - \chi_i\|$ の関数として、次式で近似される。

$$R_d(r) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ Z_r \left(\sigma_{tr} + \frac{1}{d_r} \right) \frac{e^{-\sigma_{tr} d_r}}{d_r^2} + Z_v \left(\sigma_{tr} + \frac{1}{d_v} \right) \frac{e^{-\sigma_{tr} d_v}}{d_v^2} \right\}$$

このとき、各変数は以下のように与えられる。

$$d_r = \sqrt{r^2 + Z_r^2}, \quad d_v = \sqrt{r^2 + Z_v^2}, \quad Z_r = \frac{1}{\sigma_t'}, \quad Z_v = Z_r \left(1 + \frac{4}{3} A \right)$$

$$A = \frac{1+F_{dr}}{1-F_{dr}}, \quad F_{dr} = \frac{1}{\pi} \int_{\text{媒質内側の半球}} F_r(\eta, \overline{\omega}_o) |\overline{\omega}_o \cdot N| d\overline{\omega}_o \quad \boxed{F_r(\eta, \overline{\omega}_o) \text{ はフルネル反射率}}$$

$$\eta < 1 \text{ の場合、 } F_{dr} \approx -0.4399 + \frac{0.7099}{\eta} - \frac{0.3319}{\eta^2} + \frac{0.0636}{\eta^3}$$

$$\eta > 1 \text{ の場合、 } F_{dr} \approx -\frac{1.4399}{\eta^2} + \frac{0.7099}{\eta} + 0.6681 + 0.0636\eta$$

$$\sigma_{tr} = \sqrt{3\sigma_a\sigma_t'}, \quad \sigma_t' = \sigma_s' + \sigma_a, \quad \sigma_s' = \sigma_s(1-g), \quad \alpha = \frac{\sigma_s'}{\sigma_t'}$$

σ_s : 散乱係数、 σ_a : 吸収係数 (材質固有のパラメータ)

g : 散乱方向の平均コサイン

入射方向と散乱方向のなす角の余弦と位相関数の積を積分した値で、-1.0~1.0 の範囲をとる。

(前方散乱 : 正、後方散乱 : 負、等方散乱 : 0)

このように、ダイポールモデルではマルチスキャッタリングを材質に固有の σ_s 、 σ_a 、 η 、 g の四つのパラメータをもつシンプルな関数で近似表現できる。ダイポールモデルは、図 3-30 のように、物体内部に点光源を配置し、更に境界条件を満たすように入射点の上に光を吸収する負の光源を配置することで、マルチ スキャッタリングの近似を実現している。

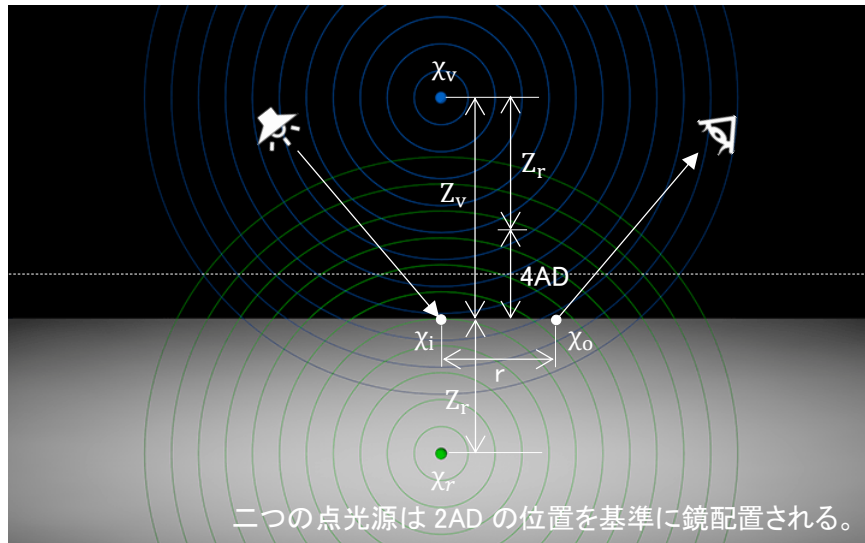


図 3-30 ダイポールモデル

ダイポールモデルが提案された後、ダイポールモデルにおける物体形状や散乱パラメータの制約を取り払った数多くのモデルが提案されている。

4. 写り込んでいる物体の特定と CINEMA 4D による撮影

(1) 平面上の広い長方形の範囲にでるハイライト部分 (図 2-1 の①)

問題のハイライト部分を拡大した画像を図 4-1 に示す。



図 4-1 平面上の広い長方形の範囲にでるハイライト部分の拡大画像

実写においては、展示ブースとカメラの間、又はカメラの後方で、オレンジのフレームより少し高い位置に反射板、又は面発光照明を配置することで同様のハイライトが入った映像を撮影できると思われる。

CINEMA 4D による撮影設定は以下の通り。

- (A) 展示ブースのオレンジ色のフレームの鏡面反射材料を設定
- (B) ハイライト領域の前方に平面を配置して、発光材料を設定

レンダリング例を図 4-2 に示す。



図 4-2 レンダリング例 1

(2) 楕円筒面にでる照明器具の像らしきハイライト (図 2-1 の②)

問題のハイライト部分を拡大した画像を図 4-3 に示す。



図 4-3 楕円筒面にでる照明器具の像らしきハイライト部分の拡大画像

実写においては、楕円筒面の上に、2本を一組とする蛍光灯2組を反射率の高い仕切りで挟んで、2組配置した照明に、ボケた屈折が生じるカバーを被せることで同様のハイライトが入った映像を撮影できると思われる。

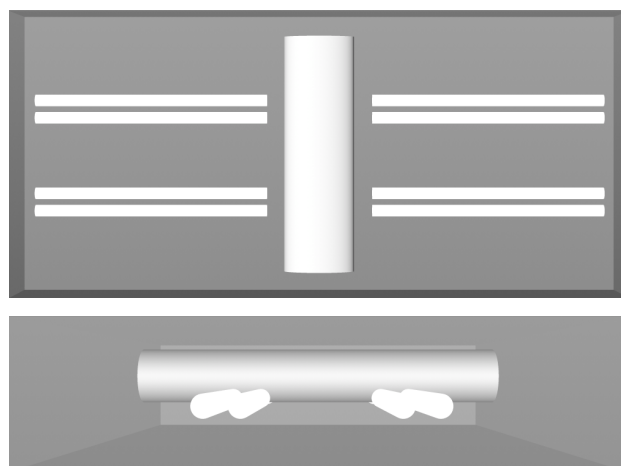


図 4-4 想定 of 照明器具

CINEMA 4D による撮影設定は以下の通り。

- (A) 図 4-4 の照明器具のモデルを作成して、楕円筒面上部に配置
- (B) 照明器具のモデルの蛍光灯部分に発光マテリアルを設定
- (C) 照明器具のモデルの中央の仕切り部分に鏡面反射マテリアルを設定
- (D) 照明器具のモデルのカバー部分にぼけた屈折マテリアルを設定

レンダリング例を図 4-5 に示す。



図 4-5 レンダリング例 2

蛍光灯部分をねじった形状にした場合のレンダリング例を示す。



図 4-6 レンダリング例 3

(3) 文字形状の領域にでるハイライト (図 2-1 の③)

実写においては、ハイライトを出す面の前方に文字形状領域をマスクした反射板又は面照明を配置することで同様のハイライトが入った映像を撮影できると思われる。

CINEMA 4D による撮影設定は以下の通り。

- (A) 文字モデルを作成して、ハイライトを入れる面の前に配置
- (B) 文字モデルに発光マテリアルを設定

レンダリング例を図 4-7 に示す。



図 4-7 レンダリング例 4

5. 特記事項

本資料の光に関する基礎知識に関する記載の参考（一部引用）源（ウェブサイト）を以下に示す。

本資料の場所	参照源／引用元		
	ウェブサイト	ページ タイトル	URL
3.2 章	電磁界情報センター	「電磁波とは」	https://www.ieic-emf.jp/electromagnetism.html
	産業技術総合研究所	「準備：マクスウェルの方程式」	https://staff.aist.go.jp/yoshizawa-akio/appendix_pdf/601_Maxwell_140817.pdf
3.3 章	ウシオ電機	「立体角」	https://www.ushio.co.jp/jp/technology/glossary/glossary_ra/solid_angle.html
	ウィキペディア	「ステラジアン」	https://ja.wikipedia.org/wiki/ステラジアン
3.4 章 (1)～(6)項	ウィキペディア	「放射エネルギー」	https://ja.wikipedia.org/wiki/放射エネルギー
		「放射束」	https://ja.wikipedia.org/wiki/放射束
		「放射強度」	https://ja.wikipedia.org/wiki/放射強度
		「放射輝度」	https://ja.wikipedia.org/wiki/放射輝度
		「放射照度」	https://ja.wikipedia.org/wiki/放射照度
	J-STAGE	「放射発散度」	https://ja.wikipedia.org/wiki/放射発散度
		「分光放射測定の基礎」	https://www.istage.ist.go.jp/article/bunkou1951/22/4/22_4_215/article-char/ja/ https://www.istage.ist.go.jp/article/bunkou1951/22/4/22_4_215/pdf-char/ja/
		「写真測量とリモートセンシング」 「1.野外分光放射測定の定義」 「2.用語の定義と測定の幾何」 「3.野外における分光測定」	https://www.istage.ist.go.jp/browse/jsprs/24/Special1/contents-char/ja https://www.istage.ist.go.jp/article/jsprs1975/24/Special1/24_Special1_5/pdf-char/ja https://www.istage.ist.go.jp/article/jsprs1975/24/Special1/24_Special1_6/pdf-char/ja https://www.istage.ist.go.jp/article/jsprs1975/24/Special1/24_Special1_11/pdf-char/ja
3.4 章 (5)項	公益社団法人 電気技術者協会	「照明用語の定義と照度計算」	https://ieea.or.jp/course/contents/09103/
3.4 章 (6)項	シーシーエス株式会社	「反射面における照度と輝度の関係」	https://www.ccs-inc.co.jp/guide/column/light_color/vol10.html
3.5 章	ウィキペディア	「プランクの法則」	https://ja.wikipedia.org/wiki/プランクの法則
	天文学辞典	「プランクの法則」	https://astro-dic.jp/plancks-law/
	東京工業大学	武藤研究室 講義ノート 「光の粒子性と物質粒子の波動性」	http://www.th.phys.titech.ac.jp/~muto/ http://www.th.phys.titech.ac.jp/~muto/lectures/QMI10/QMI10_chap01.pdf
	広島大学 大学院先進理工学系科学研究科(理学研究科)	山崎勝義様のホームページ 「Einstein の A 係数と B 係数」	https://home.hiroshima-u.ac.jp/kvam/ https://home.hiroshima-u.ac.jp/kvam/pages/results/monograph/Ref26_EinsteinAB.pdf
3.6 章 (1)～(6)項	ウシオ電機	「視感度」	https://www.ushio.co.jp/jp/technology/glossary/glossary_sa/spectral_luminous_efficacy.html
		「光量」	https://www.ushio.co.jp/jp/technology/glossary/glossary_ka/quantity_of_light.html
		「光束」	https://www.ushio.co.jp/jp/technology/glossary/glossary_ka/luminous_flux.html
		「光度」	https://www.ushio.co.jp/jp/technology/glossary/glossary_ka/luminous_intensity.html
		「輝度」	https://www.ushio.co.jp/jp/technology/glossary/glossary_ka/luminance.html
		「照度」	https://www.ushio.co.jp/jp/technology/glossary/glossary_sa/illuminance.html
	「光束発散度」	https://www.ushio.co.jp/jp/technology/glossary/glossary_ka/luminous_radiance.html	
3.6 章 (1)	東京大学	黒田和男教授 光学 講義ノート 「光学：測光・測色」	http://qopt.iis.u-tokyo.ac.jp/optics/ http://qopt.iis.u-tokyo.ac.jp/optics/10radiometryU_A4.pdf
3.6 章 (1)	東芝ライテック(株)	「明るさの定義と単位」	https://www.tlt.co.jp/tlt/lighting_design/design/basic/data/1_3.pdf

本資料の場所	参照源／引用元		
	ウェブサイト	ページ タイトル	URL
3.7 章 3.8 章	東京農工大学 佐藤勝昭助教授のホームページ	「基礎から学ぶ光物性第 3 回 光が物質の表面で反射される時」	http://home.sato-gallery.com/hikaribussei/kiso_hikari(3).pdf
	京都大学 富田博之名誉教授のホームページ	「電磁波（光）の反射」	http://www7b.biglobe.ne.jp/~fortran/wave/EMWave.pdf
	大阪大学	理学部共通教育 物理学序論 2（電磁気学入門）2015 年後期 講義ノート 「電磁波と光」	http://osksn2.hep.sci.osaka-u.ac.jp/~naga/kogi/handai-buturi-joron2_2015/index.html http://osksn2.hep.sci.osaka-u.ac.jp/~naga/kogi/handai-buturi-joron2_2015/Lec14_電磁波.pdf
	東京工業大学	武藤研究室 講義ノート 「電場」	http://www.th.phys.titech.ac.jp/~muto/ http://www.th.phys.titech.ac.jp/~muto/lectures/Gelmg06/Gem_chap02.pdf
	函館工業高等専門学校	物理のテキスト 「反射と屈折」	https://www.hakodate-ct.ac.jp/~nagasawa/Text.html https://www.hakodate-ct.ac.jp/~nagasawa/Physics_2-4.pdf
	EMAN の物理学	電磁気学 「フレネルの式」	https://eman-physics.net/electromag/contents.html https://eman-physics.net/electromag/fresnel.html
	予備校講師 斉藤全弘様のホームページ	ホーム 「光の反射と透過に伴う位相のずれ」	http://www.eonet.ne.jp/~excitingphysics/page2.html http://www.eonet.ne.jp/~excitingphysics/isounozure5.pdf
3.9 章	ウィキペディア	「拡散反射」	https://ja.wikipedia.org/wiki/拡散反射
3.10 章	ウィキペディア	「ランバート反射」	https://ja.wikipedia.org/wiki/ランバート反射
		「オーレン・ネイヤー反射」	https://ja.wikipedia.org/wiki/オーレン・ネイヤー反射
3.11 章	ウィキペディア	「Phong の反射モデル」	https://ja.wikipedia.org/wiki/Phongの反射モデル
3.12 章	電子情報通信学会	知識ベース 知識の森 「照明・反射解析」	https://www.ieice-hbkb.org/portal/doc_590.html https://www.ieice-hbkb.org/files/ad_base/view_pdf.html?p=files/02/02gun_02hen_05.pdf
	Zenn エンジニアのための情報共有コミュニティ	基礎からはじめる物理ベースレンダリング 「鏡面 BRDF」	https://zenn.dev/mebiusbox/books/619c81d2fbeatfd https://zenn.dev/mebiusbox/books/619c81d2fbeatfd/viewer/014e76
	Qiita	「脱・完全鏡面反射～GGXについて調べてみた～」 「Qiita 物理ベースレンダリングを柔らかく説明してみる（2）」	https://qiita.com/Pheema/items/f1ffb2e38cc766e6e668 https://qiita.com/emadurandal/items/ca6406fb20f4878ab222
	Cygames Engineers' Blog	「物理ベースレンダリング -基礎編-」	https://tech.cygames.co.jp/archives/2129/
	memoRANDOM	「双方向散乱面反射率分布関数 (BSSRDF)」	https://rayspace.xyz/CG/contents/BSSRDF/

ニューラルソフト株式会社

改定履歴	改 定 内 容	検 認	照 査	作 成
初期作成 21/6/30		—	—	市来 博記
B 21/9/6	特記事項に参考（一部引用）源を記載した。	—	—	市来 博記