三角錐(四面体)の重心周りの慣性モーメントについての考察

(Consideration about the moment of inertia of the tetrahedron)

初版	–	2020/8/12

作成 2020/8/12

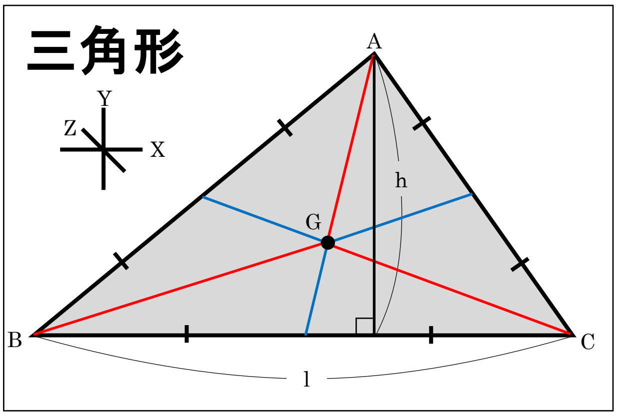
ニューラルソフト有限会社 市来 博記

本書の目的

三角形の慣性モーメントを元に三角錐の慣性モーメントを算出する。(三角形の慣性モーメントの算出方法は「理系大学生ぼうろのメモ(https://www2.hp-ez.com/hp/ball44/page3)」や「三角形の慣性モーメント - merom686(https://merom686.hatenablog.com/entry/20091202/1259759869)」等に詳しく記載されているので、そちらを参照のこと。)

前提と考え方

以下の三角形を底面に持ち、頂点 V$\left(V_x, V_y, G_z+H\right)$を持つ三角錐で考える。



●三角形 ABC は XY 平面と平行
●辺 BC は X 軸と平行
●G は三角形 ABC の重心

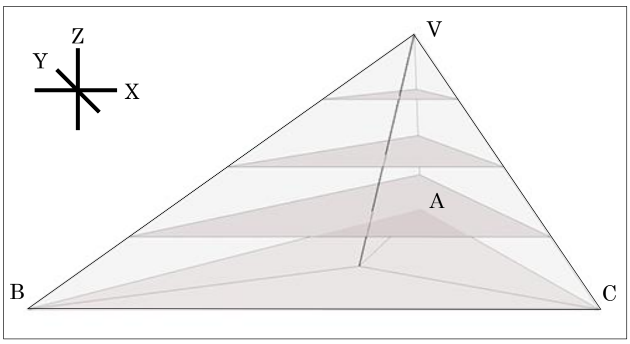
頂点から重心を通り対辺へ繋がる直線の赤い部分と青い部分の長さの比は 2:1

高さ z における三角錐の断面の三角形の重心は

$\left(x_{incl}z+G_x, y_{incl}z+G_y, z+G_z\right)$　　但し、$\left(x_{incl}=\frac{V_x-G_x}{V_z-G_z}、y_{incl}=\frac{V_y-G_y}{V_z-G_z}\right)$

三角錐の重心の位置は $\left(x_{incl}\frac{H}{4}+Gx, y_{incl}\frac{H}{4}+Gy, \frac{H}{4}+Gz\right)$

三角錐の体積密度　$\rho=\frac{M}{\frac{lhH}{2\cdot 3}}=\frac{6M}{lhH}$



考え方

三角錐の底面に平行な断面の三角形の慣性モーメントを全て合算することで三角錐の慣性モーメントを算出する。

X 軸周りの慣性モーメント

三角形の重心を通る X 軸周りの慣性モーメント

$I_{Gx:tri} = \frac{M}{18} h^2$

三角錐の底面からの高さ z における断面の三角形は底面の三角形と相似である為、断面の三角形の重心を通る X 軸周りの慣性モーメントを$I_{Gx:tri}$と H と z で表すことができる。

$I_{Z=0:tri:Gx} = \frac{Mh^2}{18} = \rho \frac{lh}{2} \mathrm{dz} \frac{h^2}{18} = \rho \frac{\mathrm{lh}^3}{36} \mathrm{dz}$ であり、$\left(1-\frac{z}{H}\right)$は l と h の係数であるので 4 乗となる。

$$I_{Gx:tri:z} = I_{Gx:tri:Z=0} \left(1-\frac{z}{H}\right)^4$$

$$\mathrm{d}I_{Gx} = \underbrace{I_{Gx:tri:Z=0}\left(1-\frac{z}{H}\right)^4}_{\text{三角形の重心周り(X 軸)の慣性モーメント}} + \underbrace{\overbrace{\rho \frac{lh}{2} dz \left(1-\frac{z}{H}\right)^2}^{\text{三角形の質量}} \left(\overbrace{\left(\left(y_{incl} z + G_y\right) - \left(y_{incl} \frac{H}{4} + Gy\right)\right)^2}^{\text{三角形の重心と三角錐の重心とのY 軸における距離の 2 乗}} + \overbrace{\left((z + G_z) - \left(\frac{H}{4} + Gz\right)\right)^2}^{\text{三角形の重心と三角錐の重心とのZ 軸における距離の 2 乗}} \right)}_{\text{三角形の重心が三角錐の重心から離れていることにより発生する慣性モーメント（平行軸定理）}}$$

$$I_{Gx:tri:Z=0} = \rho \frac{lh}{2} dz \frac{h^2}{18} = \rho \frac{\mathrm{lh}^3}{36} dz$$

$$\mathrm{d}I_{Gx}\text{の 1 項} = \rho \frac{\mathrm{lh}^3}{36} dz \left(\frac{1}{H^4} z^4 - \frac{4}{H^3} z^3 + \frac{6}{H^2} z^2 - \frac{4}{H} z + 1\right) = \rho \frac{\mathrm{lh}^3}{36} dz \frac{1}{H^4} (z^4 - 4Hz^3 + 6H^2 z^2 - 4H^3 z + H^4)$$

$$\mathrm{d}I_{Gx}\text{の 2 項} = \rho \frac{lh}{2} dz \left(1-\frac{z}{H}\right)^2 \left(\left(y_{incl} z - y_{incl} \frac{H}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{H}{4}\right)^2\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz \left(1-\frac{z}{H}\right)^2 \left(\left(y_{incl}\left(z - \frac{H}{4}\right)\right)^2 + \left(z - \frac{H}{4}\right)^2\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz \left(1-\frac{z}{H}\right)^2 \left({y_{incl}}^2 \left(z - \frac{H}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{H}{4}\right)^2\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz \left(1-\frac{z}{H}\right)^2 \left(({y_{incl}}^2 + 1) \left(z - \frac{H}{4}\right)^2\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz \left(1-\frac{z}{H}\right)^2 \left(({y_{incl}}^2 + 1) \left(z^2 - \frac{H}{2} z + \frac{H^2}{16}\right)\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz ({y_{incl}}^2 + 1) \left(1-\frac{z}{H}\right)^2 \left(z^2 - \frac{H}{2} z + \frac{H^2}{16}\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz({y_{incl}}^2 + 1)\left(\frac{1}{H^2}z^2 - \frac{2}{H}z + 1\right)\left(z^2 - \frac{H}{2}z + \frac{H^2}{16}\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz({y_{incl}}^2 + 1)\frac{1}{H^2}(z^2 - 2Hz + H^2)\left(z^2 - \frac{H}{2}z + \frac{H^2}{16}\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz({y_{incl}}^2 + 1)\frac{1}{H^2}\left(z^4 - \frac{5H}{2}z^3 + \frac{33H^2}{16}z^2 - \frac{5H^3}{8}z + \frac{H^4}{16}\right)$$

$$\mathrm{d}I_{Gx} = \rho \frac{l\mathrm{h}^3}{36}\frac{1}{H^4}(z^4 - 4Hz^3 + 6H^2z^2 - 4H^3z + H^4)dz +$$

$$\rho \frac{lh}{2}({y_{incl}}^2 + 1)\frac{1}{H^2}\left(z^4 - \frac{5H}{2}z^3 + \frac{33H^2}{16}z^2 - \frac{5H^3}{8}z + \frac{H^4}{16}\right)dz$$

$$I_{Gx} = \rho \frac{l\mathrm{h}^3}{36}\frac{1}{H^4}\int_0^H(z^4 - 4Hz^3 + 6H^2z^2 - 4H^3z + H^4)dz +$$

$$\rho \frac{lh}{2}({y_{incl}}^2 + 1)\frac{1}{H^2}\int_0^H\left(z^4 - \frac{5H}{2}z^3 + \frac{33H^2}{16}z^2 - \frac{5H^3}{8}z + \frac{H^4}{16}\right)dz$$

$$= \rho \frac{l\mathrm{h}^3}{36}\frac{1}{H^4}\left[\frac{1}{5}z^5 - Hz^4 + 2H^2z^3 - 2H^3z^2 + H^4z\right]_0^H + \rho \frac{lh}{2}({y_{incl}}^2 + 1)\frac{1}{H^2}\left[\frac{1}{5}z^5 - \frac{5H}{8}z^4 + \frac{11H^2}{16}z^3 - \frac{5H^3}{16}z^2 + \frac{H^4}{16}z\right]_0^H$$

$$= \rho \frac{l\mathrm{h}^3}{36}\frac{1}{H^4}\left(\frac{1}{5}H^5 - H^5 + 2H^5 - 2H^5 + H^5\right) + \rho \frac{lh}{2}({y_{incl}}^2 + 1)\frac{1}{H^2}\left(\frac{1}{5}H^5 - \frac{5H^5}{8} + \frac{11H^5}{16} - \frac{5H^5}{16} + \frac{H^5}{16}\right)$$

$$= \rho \frac{l\mathrm{h}^3}{36}\frac{1}{5}\mathrm{H} + \rho \frac{lh}{2}({y_{incl}}^2 + 1)H^3\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{8} + \frac{11}{16} - \frac{5}{16} + \frac{1}{16}\right)$$

$$= \rho \frac{l\mathrm{h}^3}{36}\frac{1}{5}\mathrm{H} + \rho \frac{lh}{2}({y_{incl}}^2 + 1)\frac{1}{80}H^3$$

$$= \frac{6M}{lhH}\frac{l\mathrm{h}^3}{36}\frac{1}{5}\mathrm{H} + \frac{6M}{lhH}\frac{lh}{2}\frac{1}{80}H^3({y_{incl}}^2 + 1)$$

$$= \frac{Mh^2}{30} + \frac{3M}{80}H^2({y_{incl}}^2 + 1)$$

Z 軸周りの慣性モーメント

三角形の重心を通る Z 軸周りの慣性モーメント

$I_{Gz:tri} = \frac{M}{12}(L1^2 + L2^2 + L3^2)$　　但し、$L1 = (A - G).Length$、$L2 = (B - G).Length$、$L3 = (C - G).Length$

三角錐の底面からの高さ z における断面の三角形は底面の三角形と相似である為、断面の三角形の重心を通る Z 軸周りの慣性モーメントを$I_{Gz:tri}$と H と z で表すことができる。

$I_{Gz:tri:Z=0} = \frac{M}{12}(L1^2 + L2^2 + L3^2) = \rho\frac{lh}{24}dz(L1^2 + L2^2 + L3^2)$ であり、$\left(1 - \frac{z}{H}\right)$は l と h と L1~3 の係数であるので 4 乗となる。

$$I_{Gz:tri:z} = I_{Gz:tri:Z=0}\left(1 - \frac{z}{H}\right)^4$$

$$\mathrm{d}I_{Gz} = \underbrace{I_{Gz:tri:Z=0}\left(1-\frac{z}{H}\right)^4}_{\text{三角形の重心周り(Z 軸)の慣性モーメント}} + \underbrace{\overbrace{\rho\frac{lh}{2}dz\left(1-\frac{z}{H}\right)^2}^{\text{三角形の質量}}\left(\overbrace{\left(\left(x_{incl}z+G_x\right)-\left(x_{incl}\frac{H}{4}+Gx\right)\right)^2}^{\text{三角形の重心と三角錐の重心との X 軸における距離の 2 乗}} + \overbrace{\left(\left(y_{incl}z+G_y\right)-\left(y_{incl}\frac{H}{4}+Gy\right)\right)^2}^{\text{三角形の重心と三角錐の重心との Y 軸における距離の 2 乗}}\right)}_{\text{三角形の重心が三角錐の重心から離れていることにより発生する慣性モーメント（平行軸定理）}}$$

$$I_{Gz:tri:Z=0} = \rho\frac{lh}{2}dz\frac{1}{12}(L1^2 + L2^2 + L3^2) = \rho\frac{\mathrm{lh}}{24}dz(L1^2 + L2^2 + L3^2)$$

$$\mathrm{d}I_{Gz}\text{の 1 項} = \rho\frac{\mathrm{lh}}{24}dz(L1^2 + L2^2 + L3^2)\left(\frac{1}{H^4}z^4 - \frac{4}{H^3}z^3 + \frac{6}{H^2}z^2 - \frac{4}{H}z + 1\right)$$

$$= \rho\frac{\mathrm{lh}}{24}dz(L1^2 + L2^2 + L3^2)\frac{1}{H^4}(z^4 - 4Hz^3 + 6H^2z^2 - 4H^3z + H^4)$$

$$\mathrm{d}I_{Gz}\text{の 2 項} = \rho\frac{lh}{2}dz\left(1-\frac{z}{H}\right)^2\left(\left(x_{incl}z - x_{incl}\frac{H}{4}\right)^2 + \left(y_{incl}z - y_{incl}\frac{H}{4}\right)^2\right)$$

$$= \rho\frac{lh}{2}dz\left(1-\frac{z}{H}\right)^2\left(\left(x_{incl}\left(z-\frac{H}{4}\right)\right)^2 + \left(y_{incl}\left(z-\frac{H}{4}\right)\right)^2\right)$$

$$= \rho\frac{lh}{2}dz\left(1-\frac{z}{H}\right)^2\left(x_{incl}{}^2\left(z-\frac{H}{4}\right)^2 + y_{incl}{}^2\left(z-\frac{H}{4}\right)^2\right)$$

$$= \rho\frac{lh}{2}dz\left(1-\frac{z}{H}\right)^2\left((x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)\left(z-\frac{H}{4}\right)^2\right)$$

$$= \rho\frac{lh}{2}dz\left(1-\frac{z}{H}\right)^2\left((x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)\left(z^2-\frac{H}{2}z+\frac{H^2}{16}\right)\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz\left((x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)\right)\left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 \left(z^2 - \frac{H}{2}z + \frac{H^2}{16}\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz(x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)\left(\frac{1}{H^2}z^2 - \frac{2}{H}z + 1\right)\left(z^2 - \frac{H}{2}z + \frac{H^2}{16}\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz(x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)\frac{1}{H^2}(z^2 - 2Hz + H^2)\left(z^2 - \frac{H}{2}z + \frac{H^2}{16}\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz(x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)\frac{1}{H^2}\left(z^4 - \frac{5H}{2}z^3 + \frac{33H^2}{16}z^2 - \frac{5H^3}{8}z + \frac{H^4}{16}\right)$$

$$\mathrm{d}I_{Gz} = \rho \frac{\mathrm{lh}}{24}(L1^2 + L2^2 + L3^2)\frac{1}{H^4}(z^4 - 4Hz^3 + 6H^2z^2 - 4H^3z + H^4)dz +$$

$$\rho \frac{lh}{2}(x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)\frac{1}{H^2}\left(z^4 - \frac{5H}{2}z^3 + \frac{33H^2}{16}z^2 - \frac{5H^3}{8}z + \frac{H^4}{16}\right)dz$$

$$I_{Gz} = \rho \frac{\mathrm{lh}}{24}(L1^2 + L2^2 + L3^2)\frac{1}{H^4}\int_0^H(z^4 - 4Hz^3 + 6H^2z^2 - 4H^3z + H^4)dz +$$

$$\rho \frac{lh}{2}(x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)\frac{1}{H^2}\int_0^H\left(z^4 - \frac{5H}{2}z^3 + \frac{33H^2}{16}z^2 - \frac{5H^3}{8}z + \frac{H^4}{16}\right)dz$$

$$= \rho \frac{\mathrm{lh}}{24}(L1^2 + L2^2 + L3^2)\frac{1}{H^4}\left[\frac{1}{5}z^5 - Hz^4 + 2H^2z^3 - 2H^3z^2 + H^4z\right]_0^H +$$

$$\rho \frac{lh}{2}(x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)\frac{1}{H^2}\left[\frac{1}{5}z^5 - \frac{5H}{8}z^4 + \frac{11H^2}{16}z^3 - \frac{5H^3}{16}z^2 + \frac{H^4}{16}z\right]_0^H$$

$$= \rho \frac{\mathrm{lh}}{24}(L1^2 + L2^2 + L3^2)\frac{1}{H^4}\left(\frac{1}{5}H^5 - H^5 + 2H^5 - 2H^5 + H^5\right) +$$

$$\rho \frac{lh}{2}(x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)\frac{1}{H^2}\left(\frac{1}{5}H^5 - \frac{5H^5}{8} + \frac{11H^5}{16} - \frac{5H^5}{16} + \frac{H^5}{16}\right)$$

$$= \rho \frac{\mathrm{lh}}{24}(L1^2 + L2^2 + L3^2)\frac{1}{5}H + \rho \frac{lh}{2}(x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)H^3\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{8} + \frac{11}{16} - \frac{5}{16} + \frac{1}{16}\right)$$

$$= \rho \frac{\mathrm{lh}}{24}\frac{1}{5}H(L1^2 + L2^2 + L3^2) + \rho \frac{lh}{2}\frac{1}{80}H^3(x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)$$

$$= \frac{6M}{lhH}\frac{\mathrm{lh}}{24}\frac{1}{5}H(L1^2 + L2^2 + L3^2) + \frac{6M}{lhH}\frac{lh}{2}\frac{1}{80}H^3(x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)$$

$$= \frac{M}{20}(L1^2 + L2^2 + L3^2) + \frac{3M}{80}H^2(x_{incl}{}^2 + y_{incl}{}^2)$$

Y 軸周りの慣性モーメント

三角形の重心を通る Y 軸周りの慣性モーメント

$I_{Gy:tri} = I_{Gz:tri} - I_{Gx:tri}$　　　（薄板の直行軸の定理より）

三角錐の底面からの高さ z における断面の三角形は底面の三角形と相似である為、断面の三角形の重心を通る Y 軸周りの慣性モーメントを$I_{Gy:tri}$と H と z で表すことができる。

$I_{Gy:tri:Z=0} = \frac{M}{12}(L1^2 + L2^2 + L3^2) - \frac{M}{18}h^2 = \rho\ \frac{lh}{24}dz(L1^2 + L2^2 + L3^2) - \rho\ \frac{lh^3}{36}dz$ であり、$\left(1 - \frac{z}{H}\right)$は l と h と L1~3 の係数であるので 4 乗となる。（$L1 = (A - G).Length$、$L2 = (B - G).Length$、$L3 = (C - G).Length$）

$$I_{Gy:tri:z} = I_{Gy:tri:Z=0}\left(1 - \frac{z}{H}\right)^{4}$$

$$\mathrm{d}I_{Gy} = \underbrace{I_{Gy:tri:Z=0}\left(1 - \frac{z}{H}\right)^4}_{\text{三角形の重心周り(Y 軸)の慣性モーメント}} + \underbrace{\overbrace{\rho\ \frac{lh}{2}dz\left(1 - \frac{z}{H}\right)^2}^{\text{三角形の質量}}\left(\overbrace{\left((x_{incl}z + G_x) - \left(x_{incl}\frac{H}{4} + Gx\right)\right)^2}^{\text{三角形の重心と三角錐の重心とのX 軸における距離の 2 乗}} + \overbrace{\left((z + G_z) - \left(\frac{H}{4} + Gz\right)\right)^2}^{\text{三角形の重心と三角錐の重心とのZ 軸における距離の 2 乗}}\right)}_{\text{三角形の重心が三角錐の重心から離れていることにより発生する慣性モーメント（平行軸定理）}}$$

$$I_{Gz:tri:Z=0} = \rho\ \frac{lh}{2}dz\frac{1}{12}(L1^2 + L2^2 + L3^2) - \rho\ \frac{lh}{2}dz\frac{h^2}{18} = \rho\ \frac{\mathrm{lh}}{24}dz(L1^2 + L2^2 + L3^2) - \rho\ \frac{\mathrm{lh}^3}{36}dz$$

$$\mathrm{d}I_{Gy}\text{の 1 項} = \left(\rho\ \frac{\mathrm{lh}}{24}dz(L1^2 + L2^2 + L3^2) - \rho\ \frac{lh^3}{36}dz\right)\left(\frac{1}{H^4}z^4 - \frac{4}{H^3}z^3 + \frac{6}{H^2}z^2 - \frac{4}{H}z + 1\right)$$

$$= \left(\rho\ \frac{\mathrm{lh}}{24}dz(L1^2 + L2^2 + L3^2) - \rho\ \frac{lh^3}{36}dz\right)\frac{1}{H^4}(z^4 - 4Hz^3 + 6H^2z^2 - 4H^3z + H^4)$$

$$\mathrm{d}I_{Gy}\text{の 2 項} = \rho\ \frac{lh}{2}dz\left(1 - \frac{z}{H}\right)^2\left(\left(x_{incl}z - x_{incl}\frac{H}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{H}{4}\right)^2\right)$$

$$= \rho\ \frac{lh}{2}dz\left(1 - \frac{z}{H}\right)^2\left(\left(x_{incl}\left(z - \frac{H}{4}\right)\right)^2 + \left(z - \frac{H}{4}\right)^2\right)$$

$$= \rho\ \frac{lh}{2}dz\left(1 - \frac{z}{H}\right)^2\left({x_{incl}}^2\left(z - \frac{H}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{H}{4}\right)^2\right)$$

$$= \rho\ \frac{lh}{2}dz\left(1 - \frac{z}{H}\right)^2\left(({x_{incl}}^2 + 1)\left(z - \frac{H}{4}\right)^2\right)$$

$$= \rho\ \frac{lh}{2}dz\left(1 - \frac{z}{H}\right)^2\left(({x_{incl}}^2 + 1)\left(z^2 - \frac{H}{2}z + \frac{H^2}{16}\right)\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz({x_{incl}}^2+1)\left(1-\frac{z}{H}\right)^2\left(z^2-\frac{H}{2}z+\frac{H^2}{16}\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz({x_{incl}}^2+1)\left(\frac{1}{H^2}z^2-\frac{2}{H}z+1\right)\left(z^2-\frac{H}{2}z+\frac{H^2}{16}\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz({x_{incl}}^2+1)\frac{1}{H^2}(z^2-2Hz+H^2)\left(z^2-\frac{H}{2}z+\frac{H^2}{16}\right)$$

$$= \rho \frac{lh}{2} dz({x_{incl}}^2+1)\frac{1}{H^2}\left(z^4-\frac{5H}{2}z^3+\frac{33H^2}{16}z^2-\frac{5H^3}{8}z+\frac{H^4}{16}\right)$$

$$\mathrm{d}I_{Gy} = \left(\rho \frac{\mathrm{lh}}{24}(L1^2+L2^2+L3^2) - \rho \frac{l\mathrm{h}^3}{36}\right)\frac{1}{H^4}(z^4-4Hz^3+6H^2z^2-4H^3z+H^4)dz +$$

$$\rho \frac{lh}{2}({x_{incl}}^2+1)\frac{1}{H^2}\left(z^4-\frac{5H}{2}z^3+\frac{33H^2}{16}z^2-\frac{5H^3}{8}z+\frac{H^4}{16}\right)dz$$

$$I_{Gy} = \left(\rho \frac{\mathrm{lh}}{24}(L1^2+L2^2+L3^2) - \rho \frac{l\mathrm{h}^3}{36}\right)\frac{1}{H^4}\int_0^H(z^4-4Hz^3+6H^2z^2-4H^3z+H^4)dz +$$

$$\rho \frac{lh}{2}({x_{incl}}^2+1)\frac{1}{H^2}\int_0^H\left(z^4-\frac{5H}{2}z^3+\frac{33H^2}{16}z^2-\frac{5H^3}{8}z+\frac{H^4}{16}\right)dz$$

$$= \left(\rho \frac{\mathrm{lh}}{24}(L1^2+L2^2+L3^2) - \rho \frac{l\mathrm{h}^3}{36}\right)\frac{1}{H^4}\left[\frac{1}{5}z^5-Hz^4+2H^2z^3-2H^3z^2+H^4z\right]_0^H +$$

$$\rho \frac{lh}{2}({x_{incl}}^2+1)\frac{1}{H^2}\left[\frac{1}{5}z^5-\frac{5H}{8}z^4+\frac{11H^2}{16}z^3-\frac{5H^3}{16}z^2+\frac{H^4}{16}z\right]_0^H$$

$$= \left(\rho \frac{\mathrm{lh}}{24}(L1^2+L2^2+L3^2) - \rho \frac{l\mathrm{h}^3}{36}\right)\frac{1}{H^4}\left(\frac{1}{5}H^5-H^5+2H^5-2H^5+H^5\right) +$$

$$\rho \frac{lh}{2}({x_{incl}}^2+1)\frac{1}{H^2}\left(\frac{1}{5}H^5-\frac{5H^5}{8}+\frac{11H^5}{16}-\frac{5H^5}{16}+\frac{H^5}{16}\right)$$

$$= \left(\rho \frac{\mathrm{lh}}{24}(L1^2+L2^2+L3^2) - \rho \frac{\mathrm{lh}^3}{36}\right)\frac{1}{5}\mathrm{H} + \rho \frac{lh}{2}({x_{incl}}^2+1)H^3\left(\frac{1}{5}-\frac{5}{8}+\frac{11}{16}-\frac{5}{16}+\frac{1}{16}\right)$$

$$= \left(\rho \frac{\mathrm{lh}}{24}(L1^2+L2^2+L3^2) - \rho \frac{\mathrm{lh}^3}{36}\right)\frac{1}{5}\mathrm{H} + \rho \frac{lh}{2}({x_{incl}}^2+1)\frac{1}{80}H^3$$

$$= \left(\frac{6M}{lhH}\frac{\mathrm{lh}}{24}(L1^2+L2^2+L3^2) - \frac{6M}{lhH}\frac{\mathrm{lh}^3}{36}\right)\frac{1}{5}\mathrm{H} + \frac{6M}{lhH}\frac{lh}{2}\frac{1}{80}H^3({y_{incl}}^2+1)$$

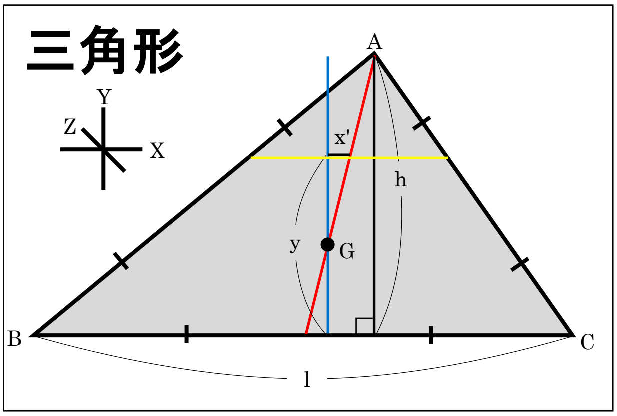
$$= \left(\frac{M}{20}(L1^2+L2^2+L3^2) - \frac{M\mathrm{h}^2}{30}\right) + \frac{3M}{80}H^2({x_{incl}}^2+1)$$

三角錐の慣性モーメント テンソル

$$\mathrm{I}=\frac{M}{60}\begin{pmatrix} 2h^2 & -GA_{incl}2h^2 & 0 \\ -GA_{incl}2h^2 & 3(L1^2+L2^2+L3^2)-2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3(L1^2+L2^2+L3^2) \end{pmatrix}+\frac{3M}{80}H^2\begin{pmatrix} {y_{incl}}^2+1 & -y_{incl}x_{incl} & -x_{incl} \\ -x_{incl}y_{incl} & {x_{incl}}^2+1 & -y_{incl} \\ -x_{incl} & -y_{incl} & {x_{incl}}^2+{y_{incl}}^2 \end{pmatrix}$$

$-GA_{incl}2h^2$ の求め方

三角形の重心から頂点 V への直線の延長線が Y 軸と平行でない場合、重心周りの慣性モーメント テンソルの$(1,2)$の成分と$(2,1)$の成分は 0 にならない。



面密度を $\rho=\frac{M}{l h \frac{1}{2}}=\frac{2M}{lh}$ 、重心を通る Y 軸と平行なベクトルに対する G から A へのベクトルの傾きを $GA_{incl}=\frac{A_x-G_x}{A_y-G_y}$ 、三角形の高さ y における重心を通る Y 軸と平行なベクトルと G から A へのベクトルの X 軸方向の距離を $x'=GA_{incl}y-GA_{incl}\frac{h}{3}=GA_{incl}\left(y-\frac{h}{3}\right)$ とすると、

上の図の黄色い直線の質量

$$\sum -myx=\int_0^h -y\,x'\rho l\left(1-\frac{y}{h}\right)dy$$

$$=GA_{incl}\frac{2M}{h}\int_0^h -y\left(y-\frac{h}{3}\right)\left(1-\frac{y}{h}\right)dy$$

$$=GA_{incl}\frac{2M}{h}\int_0^h \frac{1}{3h}(3y^3-4hy^2+h^2y)\,dy$$

$$=GA_{incl}\frac{2M}{h}\frac{1}{3h}\left[\frac{3}{4}y^4-\frac{4}{3}hy^3+\frac{1}{2}h^2y^2\right]_0^h$$

$$=GA_{incl}\frac{2M}{3h^2}\left(\frac{3}{4}h^4-\frac{4}{3}h^4+\frac{1}{2}h^4\right)$$

$$=GA_{incl}M\left(\frac{1}{2}h^2-\frac{8}{9}h^2+\frac{1}{3}h^2\right)=-GA_{incl}\frac{M}{18}h^2$$

X 軸周りの慣性モーメントの$\mathrm{d}I_{Gx}$の 1 項の式に当てはめて考えると、三角錐の慣性モーメント テンソルの$(1,2)$の成分と$(2,1)$の成分は$\frac{-GA_{incl}Mh^2}{30}$ となる。($\frac{M}{18}h^2 \rightarrow 2h^2$ で、$-GA_{incl}$は固定値であるので、$-GA_{incl}\frac{M}{18}h^2 \rightarrow -GA_{incl}2h^2$)