楕円錐台の重心周りの慣性モーメントについての考察 (Consideration about the moment of inertia of elliptical frustum)			作成 2020/9/15 ニューラルソフト有限会社 市来 博記
初版	－	2020/9/15	

本書の目的

楕円錐の慣性モーメントを算出する。

前提と考え方

図 1 に示す楕円錐台（水色の部分。a1,b1,a2,b2,h1 が指定される。）で考える。

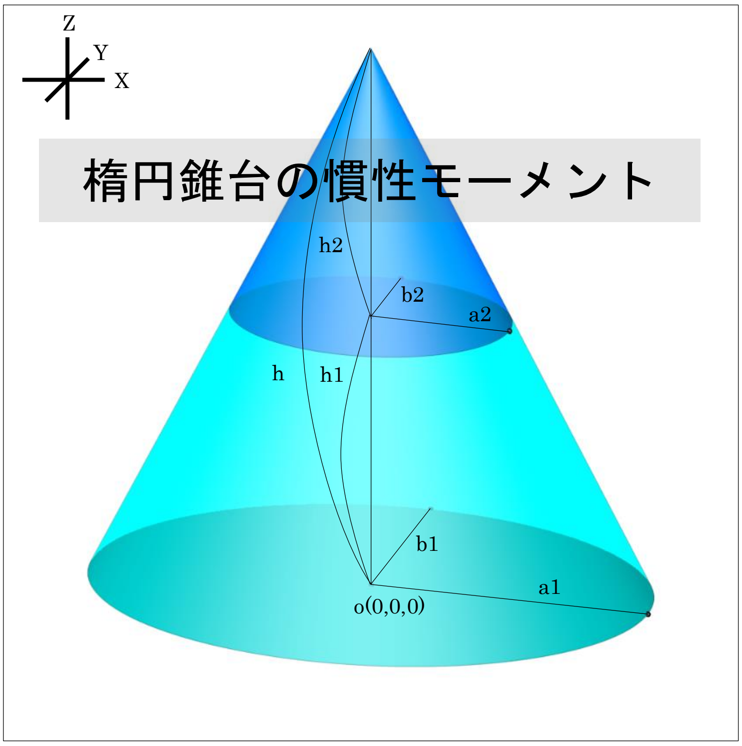

図 1

考え方

楕円錐を高さ h1 の位置で底面と平行な面で切断したもの（図 1 の水色の部分）として算出する。

楕円錐の重心は、$\left(0,0,\frac{h}{4}\right)$

楕円錐の体積は、$\frac{1}{3}\pi abh$

図 1 の全体楕円錐の高さは、

$h = \frac{h_1 a_1}{a_1 - a_2}$ 又は $\frac{h_1 b_1}{b_1 - b_2}$

図 1 の上部円錐の高さは、$h_2 = h - h_1$

図 1 の上部円錐の重心は、$\left(0,0,h1 + \frac{h_2}{4}\right)$

図 1 の全体の楕円錐の質量は、$\mathrm{m} = \frac{1}{3}\pi a_1 b_1 h \times$ 体積密度

図 1 の上部の楕円錐の質量は、$m_2 = \frac{1}{3}\pi a_2 b_2 h_2 \times$ 体積密度

図 1 の下部の楕円錐台の質量は、$m_1 =$ 全体の楕円錐の質量－上部の楕円錐の質量

図 1 の下部楕円錐台の重心(Z 座標)は、

$$\text{全体の楕円錐の重心}_z = \frac{\text{下部の楕円錐台の重心}\times\text{下部の楕円錐台の質量}+\text{上部の楕円錐の重心}\times\text{上部の楕円錐の質量}}{\text{全体の楕円錐の質量}}$$ から

$$\text{下部の楕円錐台の重心}_z = \frac{\text{全体の楕円錐の重心}\times\text{全体の楕円錐の質量}-\text{上部の楕円錐の重心}\times\text{上部の楕円錐の質量}}{\text{下部の楕円錐台の質量}}$$ ・・・ ①

（図 1 の楕円錐の体積密度は均一であるので、上記の式中の質量の項を体積としてもよい。）

一般に楕円錐（a,b,h の取り方は図 1 と同じ）の重心周りの慣性モーメントは、

$$I_z = \frac{3}{20}(a^2+b^2)m$$

$I_{x(頂点)} = \frac{3}{20}b^2m + \frac{3}{5}h^2m$ に平行軸の定理を用いて、$I_x = I_{x(頂点)} - \left(\frac{3}{4}h\right)^2 m$

$I_{y(頂点)} = \frac{3}{20}a^2m + \frac{3}{5}h^2m$ に平行軸の定理を用いて、$I_y = I_{y(頂点)} - \left(\frac{3}{4}h\right)^2 m$

Z 軸周りの慣性モーメント

$$\begin{aligned} I_z &= 全体の楕円錐のI_z - 上部の楕円錐のI_z \\ &= \frac{3}{20}(a_1^2+b_1^2)m - \frac{3}{20}(a_2^2+b_2^2)m_2 \end{aligned}$$

X 軸周りの慣性モーメント

$$全体の楕円錐のI_{x(下部楕円錐台の重心)} = \frac{3}{20}b_1^2m + \frac{3}{5}h^2m - \left(\frac{3}{4}h\right)^2 m + \left(下部円錐台の重心_z - \frac{h}{4}\right)^2 m$$

$$上部楕円錐のI_{x(下部楕円錐台の重心)} = \frac{3}{20}b_2^2m_2 + \frac{3}{5}h_2^2m_2 - \left(\frac{3}{4}h_2\right)^2 m_2 + \left(下部円錐台の重心_z - \left(h1 + \frac{h_2}{4}\right)\right)^2 m_2$$

$$I_x = 全体の楕円錐のI_{x(下部楕円錐台の重心)} - 上部楕円錐のI_{x(下部楕円錐台の重心)}$$

Y 軸周りの慣性モーメント

$$全体の楕円錐のI_{y(下部楕円錐台の重心)} = \frac{3}{20}a_1^2m + \frac{3}{5}h^2m - \left(\frac{3}{4}h\right)^2 m + \left(下部円錐台の重心_z - \frac{h}{4}\right)^2 m$$

$$上部楕円錐のI_{y(下部楕円錐台の重心)} = \frac{3}{20}a_2^2m_2 + \frac{3}{5}h_2^2m_2 - \left(\frac{3}{4}h_2\right)^2 m_2 + \left(下部円錐台の重心_z - \left(h1 + \frac{h_2}{4}\right)\right)^2 m_2$$

$$I_y = 全体の楕円錐のI_{y(下部楕円錐台の重心)} - 上部楕円錐のI_{y(下部楕円錐台の重心)}$$

楕円錐体の慣性モーメント テンソル

上記の式で求めた(I_x, I_y, I_z)が対角成分となり、その他の成分は 0 となる。