オイラーの運動方程式についての考察 (Consideration of Euler's equation of motion)			作成 2019/10/1 ニューラルソフト有限会社 市来 博記
初版	ー	2019/10/1	

オイラーの運動方程式

$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}} = N$ ・・・・ (1)

L　角運動量

N　トルク

慣性主軸系(x,y,z)の座標系がω軸周りを回転していると、

$\omega = \omega_x\hat{x} + \omega_y\hat{y} + \omega_z\hat{z}$

$(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ はωベクトル先端の慣性主軸座標系の座標

角運動量は

$\mathrm{L} = \mathrm{I}\cdot\omega = I_x\omega_x\hat{x} + I_y\omega_y\hat{y} + I_z\omega_z\hat{z}$

これを(1)に代入すると

$\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}} = \underbrace{I_x\dot{\omega}_x\hat{x} + I_x\omega_x\dot{\hat{x}}} + I_y\dot{\omega}_y\hat{y} + I_y\omega_y\dot{\hat{y}} + I_z\dot{\omega}_z\hat{z} + I_z\omega_z\dot{\hat{z}}$　（ドットは時間による微分を表す。）

$\dot{\overline{I_x\omega_x\hat{x}}} = I_x\dot{\omega}_x\hat{x} + I_x\omega_x\dot{\hat{x}}$ は

$(\mathrm{fg})' = \mathrm{f}'\mathrm{g} + \mathrm{fg}'$

$= I_x\dot{\omega}_x\hat{x} + I_y\dot{\omega}_y\hat{y} + I_z\dot{\omega}_z\hat{z} + I_x\omega_x\dot{\hat{x}} + I_y\omega_y\dot{\hat{y}} + I_z\omega_z\dot{\hat{z}}$

ベクトル r が角速度ωで回転（回転軸はωベクトル）すると、ベクトル r の先端の速度はω×r であるから、

$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} = \omega \times r$

r を$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ に置き替えると、

$\frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{dt}} = \omega \times \hat{x}$, $\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{dt}} = \omega \times \hat{y}$, $\frac{\mathrm{d}\hat{z}}{\mathrm{dt}} = \omega \times \hat{z}$

これらの関係から、

$$\begin{aligned} I_x\omega_x\dot{\hat{x}} + I_y\omega_y\dot{\hat{y}} + I_z\omega_z\dot{\hat{z}} &= I_x\omega_x(\omega\times\hat{x}) + I_y\omega_y(\omega\times\hat{y}) + I_z\omega_z(\omega\times\hat{z}) \\ &= \omega\times\left(I_x\omega_x\hat{x} + I_y\omega_y\hat{y} + I_z\omega_z\hat{z}\right) \\ &= \omega\times L \end{aligned}$$

従って、剛体の回転に関する運動方程式は

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d'L}{dt} + \omega\times L = N \quad ・・・・ \ (2)$$

$$\omega\times L = det\begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i\left(\omega_y L_z - \omega_z L_y\right) \\ j(\omega_z L_x - \omega_x L_z) \\ k\left(\omega_x L_y - \omega_y L_x\right) \end{vmatrix}$$

であるので、(2)の式を成分に分解すると、

$$\dot{L_x} + \left(\omega_y L_z - \omega_z L_y\right) = N_x$$
$$\dot{L_y} + (\omega_z L_x - \omega_x L_z) = N_y$$
$$\dot{L_z} + \left(\omega_x L_y - \omega_y L_x\right) = N_z$$

上の式に $L_x = I_x\omega_x$, $L_y = I_y\omega_y$, $L_z = I_z\omega_z$ を代入すると、

$$N_x = \dot{L_x} + \left(\omega_y L_z - \omega_z L_y\right) = \dot{L_x} + \left(\omega_y I_z\omega_z - \omega_z I_y\omega_y\right) = I_x\frac{d\omega_x}{dt} + \left(I_z - I_y\right)\omega_y\omega_z$$

$$N_y = \dot{L_y} + (\omega_z L_x - \omega_x L_z) = \dot{L_y} + (\omega_z I_x\omega_x - \omega_x I_z\omega_z) = I_y\frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z)\omega_z\omega_x$$

$$N_z = \dot{L_x} + \left(\omega_x L_y - \omega_y L_x\right) = \dot{L_z} + \left(\omega_x I_y\omega_y - \omega_y I_x\omega_x\right) = I_z\frac{d\omega_z}{dt} + \left(I_y - I_x\right)\omega_x\omega_y$$

となる。