ニューラルソフト有限会社

| DSP | 技術資料 | 検認 | 照査 | 作成 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 市来 博記 |

表　　　　　題

# 高速フーリエ変換アルゴリズムについて

副　　　　　題

## About Fast Fourier Transform Algorithm

キ ー ワ ー ド

FFT, Fast Fourier Transform, Algorithm, 高速フーリエ変換, アルゴリズム

参照/添付資料

A ~~B C D E F G H I~~
~~J~~ K L M N O P Q R
~~S~~ T U V W X Y Z

# 目次

## 1. 概要

本資料は離散フーリエ変換の演算時間を短縮する高速フーリエ変換アルゴリズム（計算方法）を説明するものです。（フーリエ級数・フーリエ変換の理論は記載しておりません。）

## 2. 高速フーリエ変換

高速フーリエ変換（FFT:Fast Fourier Transform）は 1965 年に、American Mathematical Society の学会誌で発表されました。それまで膨大な時間を要していた離散フーリエ変換（DFT: Discreate Fourie Transform）の演算時間を大幅に短縮できたため、スペクトル解析の強力な武器として用いられるようになりました。（演算対象となるサンプル データの個数は 2 のべき乗でなければなりません。）

高速フーリエ変換のアルゴリズムを具体的に見ていきます。
まず、離散フーリエ変換は、次のように定義されます。

フーリエ変換の対象となる信号は
$x(n) = x.real(n) + j\, x.Imaginary(n)$

変換結果は

$$\mathrm{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left(x.real(n) + j\, x.Imaginary(n)\right)\left(cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - j\, sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right) \quad (0 \leq k \leq N-1)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left(cos\left(\frac{-2\pi kn}{N}\right) + j\, sin\left(\frac{-2\pi kn}{N}\right)\right)$$

$cos(\alpha) = cos(-\alpha)$、$sin(\alpha) = -sin(-\alpha)$より

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right)$$

オイラーの公式 $e^{j\theta} = cos(\theta) + j\, sin(\theta)$ より

x(n)はアナログ信号をサンプリング周波数 fs でサンプリングして得られた N 個のサンプリング データ

X(k)は$\frac{kfs}{N}$［Hz］の周波数成分（振幅と位相の情報）

サンプリング周波数 1kHz でサンプリングして得られた 100 個のサンプリング データを離散フーリエ変換した場合、0Hz（=直流成分）、10Hz、20Hz、･･･990Hz までの周波数成分を得ることができます。但し、k = N/2 は周波数が fs/2 となり、$k \geq$ N/2 の周波数成分は$k <$ N/2 の周波数成分の鏡像になります。

N=8 の離散フーリエ変換を行列計算の形式で表すと次のようになります。

$$
\begin{array}{c}
exp\left(\frac{-j2\pi km}{N}\right)[\mathrm{k}][\mathrm{n}] \\
\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \longrightarrow
\end{array}
$$

$$
[\mathrm{k}]\downarrow
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\
W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\
W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\
W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\
W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\
W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\
W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\
W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}
\downarrow[\mathrm{n}]
$$

$$
W_8^{kn} = exp\left(\frac{-j2\pi}{8}\right)^{kn} = \left(e^{\frac{-j2\pi}{8}}\right)^{kn} = e^{\frac{-j2\pi kn}{8}} = exp\left(\frac{-j2\pi kn}{8}\right)
$$

式 2-1

m % n は m を n で割った余り

$cos\left(-2\pi\frac{m}{N}\right) = cos\left(-2\pi\frac{(m\,\%\,N)}{N}\right)$ 、$sin\left(-2\pi\frac{m}{N}\right) = sin\left(-2\pi\frac{(m\,\%\,N)}{N}\right)$ なので

$W_N^m = W_N^{m\,\%\,N}$ となり、式 2-1 を次のように書き換えることができます。

$$
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\
W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\
W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\
W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^{10} & W_8^{13} \\
W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} \\
W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^4 & W_8^9 & W_8^{14} & W_8^{19} \\
W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} \\
W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^4 & W_8^{11} & W_8^{18} & W_8^{25}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}
$$

式 2-2

更に次のように行を並び替えます。

同じ

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \\ X(1) \\ X(5) \\ X(3) \\ X(7) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} \\ \hline W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^4 & W_8^9 & W_8^{14} & W_8^{19} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^{10} & W_8^{13} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^4 & W_8^{11} & W_8^{18} & W_8^{25} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix} \quad \text{式 2-3}$$

下の枠内の同一列に注目すると左は$W_8^a$、右は$W_8^{a+4}$ になっています。

ここで、

$$cos\left(\frac{-2\pi \times 0}{N}\right) + j\ sin\left(\frac{-2\pi \times 0}{N}\right) = cos(0) + j\ sin(0) = 1$$

$$cos\left(\frac{-2\pi \times \frac{N}{2}}{N}\right) + j\ sin\left(\frac{-2\pi \times \frac{N}{2}}{N}\right) = cos(-\pi) + j\ sin(-\pi) = -1$$

であり、$W_8^0 = 1$、$W_8^4 = -1$であるので、式 2-3 を次のように書き換えることができます。

同じ

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \\ X(1) \\ X(5) \\ X(3) \\ X(7) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} \\ \hline W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & -W_8^0 & -W_8^1 & -W_8^2 & -W_8^3 \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & -W_8^0 & -W_8^5 & -W_8^{10} & -W_8^{15} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & -W_8^0 & -W_8^3 & -W_8^6 & -W_8^9 \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & -W_8^0 & -W_8^7 & -W_8^{14} & -W_8^{21} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix} \quad \text{式 2-4}$$

符号が反転しているだけです。

図 2-1 の同じ色の列の演算は纏めることができます。

$$
\begin{bmatrix} X(0)\\ X(4)\\ X(2)\\ X(6)\\ X(1)\\ X(5)\\ X(3)\\ X(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0\\
W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12}\\
W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6\\
W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18}\\
W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & -W_8^0 & -W_8^1 & -W_8^2 & -W_8^3\\
W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & -W_8^0 & -W_8^5 & -W_8^{10} & -W_8^{15}\\
W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & -W_8^0 & -W_8^3 & -W_8^6 & -W_8^9\\
W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & -W_8^0 & -W_8^7 & -W_8^{14} & -W_8^{21}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x(0)\\ x(1)\\ x(2)\\ x(3)\\ x(4)\\ x(5)\\ x(6)\\ x(7) \end{bmatrix}
$$

**図 2-1 式 2-4 で演算を纏めることができる列**

図 2-1 を考慮して式 2-4 を書き換えます。

上の右 4 列で演算されていた分

右の 4 列分の演算も含めて演算する

$$
\begin{bmatrix} X(0)\\ X(4)\\ X(2)\\ X(6)\\ X(1)\\ X(5)\\ X(3)\\ X(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\
W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & 0 & 0 & 0 & 0\\
W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0\\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12}\\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6\\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x1(0): x(0) + x(4)\\
x1(1): x(1) + x(5)\\
x1(2): x(2) + x(6)\\
x1(3): x(3) + x(7)\\
x1(4): W_8^0\left(x(0) - x(4)\right)\\
x1(5): W_8^1\left(x(1) - x(5)\right)\\
x1(6): W_8^2\left(x(2) - x(6)\right)\\
x1(7): W_8^3\left(x(3) - x(7)\right)
\end{bmatrix}
\qquad \text{式 2-5}
$$

左の 4 列分の演算も含めて演算する

下の左 4 列で演算されていた分

$W_N^m = W_{N/2}^{m/2}\ \left(exp\left(\frac{-j2\pi km}{N}\right) = exp\left(\frac{-j2\pi(km)\times 0.5}{N\times 0.5}\right)\right)$なので、式 2-5 を次のように書き換えることができます。

$$
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \\ X(1) \\ X(5) \\ X(3) \\ X(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x1(0) \\ x1(1) \\ x1(2) \\ x1(3) \\ x1(4) \\ x1(5) \\ x1(6) \\ x1(7) \end{bmatrix}
$$
式 2-6

式 2-6 の 8×8 の行列の 0 の部分は演算する必要がないので、次の 2 式に分解できます。

$$
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\
W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\
W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\
W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x1(0): x(0) + x(4) \\ x1(1): x(1) + x(5) \\ x1(2): x(2) + x(6) \\ x1(3): x(3) + x(7) \end{bmatrix}
$$
式 2-7

$$
\begin{bmatrix} X(1) \\ X(5) \\ X(3) \\ X(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\
W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\
W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\
W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x1(4): W_8^0\big(x(0) - x(4)\big) \\ x1(5): W_8^1\big(x(1) - x(5)\big) \\ x1(6): W_8^2\big(x(2) - x(6)\big) \\ x1(7): W_8^3\big(x(3) - x(7)\big) \end{bmatrix}
$$
式 2-8

式 2-7、式 2-8 は N=4 の離散フーリエ変換を 2 回計算することで N=8 の離散フーリエ変換を実現できることを表しています。

ここで、式 2-1、式 2-7、式 2-8 の演算回数をみると
式 2-1 → 乗算が 8×8=64 回、加算が(8-1)×8=56 回
式 2-7 → 乗算が 4×4=16 回、加算が 4+(4-1)×4=16 回
式 2-8 → 乗算が 4+4×4=20 回、加算が 4+(4-1)×4=16 回
式 2-7 ＋ 式 2-8 → 乗算が 36 回、加算が 32 回
少ない演算回数で同じ結果が得られることが分かります。
高速フーリエ変換はここまでの置き換えを繰り返すことで、$\mathrm{N} = 2^x$の離散フーリエ変換を最終的に N＝2 の離散フーリエ変換に帰着させます。

では、続きを見ていきます。

$$
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \\ X(1) \\ X(5) \\ X(3) \\ X(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x1(0) \\ x1(1) \\ x1(2) \\ x1(3) \\ x1(4) \\ x1(5) \\ x1(6) \\ x1(7) \end{bmatrix}
$$

式 2-9（式 2-5 と同じ）

$W_N^m = W_N^{m\,\%\,N}$なので、式 2-9 を次のように書き換えることができます。

同じ

$$
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \\ X(1) \\ X(5) \\ X(3) \\ X(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^{10}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x1(0) \\ x1(1) \\ x1(2) \\ x1(3) \\ x1(4) \\ x1(5) \\ x1(6) \\ x1(7) \end{bmatrix}
$$

式 2-10

下の枠内の同一列に注目すると
左は$W_8^a$、右は$W_8^{a+4}$ になっています。

左上の 4 行 4 列と同じ

$W_8^0 = 1$、$W_8^4 = -1$なので、式 2-10 は次のように書き換えることができます。

同じ

$$
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \\ X(1) \\ X(5) \\ X(3) \\ X(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_8^0 & W_8^2 & -1W_8^0 & -1W_8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_8^0 & W_8^6 & -1W_8^0 & -1W_8^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^2 & -1W_8^0 & -1W_8^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^6 & -1W_8^0 & -1W_8^6
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x1(0) \\ x1(1) \\ x1(2) \\ x1(3) \\ x1(4) \\ x1(5) \\ x1(6) \\ x1(7) \end{bmatrix}
$$

式 2-11

符号が反転しているだけです。

左上の 4 行 4 列と同じ

図 2-1 の同じ色の列の演算は纏めることができます。

$$
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \\ X(1) \\ X(5) \\ X(3) \\ X(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_8^0 & W_8^2 & -1W_8^0 & -1W_8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_8^0 & W_8^6 & -1W_8^0 & -1W_8^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^2 & -1W_8^0 & -1W_8^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^6 & -1W_8^0 & -1W_8^6
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x1(0) \\ x1(1) \\ x1(2) \\ x1(3) \\ x1(4) \\ x1(5) \\ x1(6) \\ x1(7) \end{bmatrix}
$$

**図 2-2 式 2-11 で演算を纏めることができる列**

図 2-2 を考慮して式 2-4 を書き換えます。

$$
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \\ X(1) \\ X(5) \\ X(3) \\ X(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W_8^0 & W_8^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_8^0 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & W_8^0 & W_8^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & W_8^0 & W_8^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & W_8^4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x2(0): x1(0) + x1(2) \\
x2(1): x1(1) + x1(3) \\
x2(2): W_8^0\big(x1(0) - x1(2)\big) \\
x2(3): W_8^2\big(x1(1) - x1(3)\big) \\
x2(4): x1(4) + x1(6) \\
x2(5): x1(5) + x1(7) \\
x2(6): W_8^0\big(x1(4) - x1(6)\big) \\
x2(7): W_8^2\big(x1(5) - x1(7)\big)
\end{bmatrix}
\qquad \text{式 2-12}
$$

$W_N^m = W_{N/4}^{m/4}$ $\left(exp\left(\frac{-j2\pi km}{N}\right) = exp\left(\frac{-j2\pi(km)\times 0.25}{N\times 0.25}\right)\right)$なので、式 2-12 を次のように書き換えることができます。

$$
\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \\ X(1) \\ X(5) \\ X(3) \\ X(7) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
W_2^0 & W_2^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
W_2^0 & W_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & W_2^0 & W_2^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & W_2^0 & W_2^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_2^0 & W_2^0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_2^0 & W_2^1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_2^0 & W_2^0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_2^0 & W_2^1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x2(0) \\ x2(1) \\ x2(2) \\ x2(3) \\ x2(4) \\ x2(5) \\ x2(6) \\ x2(7) \end{bmatrix}
\qquad \text{式 2-13}
$$

式 2-13 の 8×8 の行列の 0 の部分は演算する必要がないので、次の 4 式に分解できます。

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x2(0) \\ x2(1) \end{bmatrix} \quad \text{式 2-14}$$

$$\begin{bmatrix} X(2) \\ X(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x2(2) \\ x2(3) \end{bmatrix} \quad \text{式 2-15}$$

$$\begin{bmatrix} X(1) \\ X(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x2(4) \\ x2(5) \end{bmatrix} \quad \text{式 2-16}$$

$$\begin{bmatrix} X(3) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_2^0 & W_2^0 \\ W_2^0 & W_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x2(6) \\ x2(7) \end{bmatrix} \quad \text{式 2-17}$$

更に、$W_2^0 = 1$、$W_2^1 = -1$であるので、式 2-14 から式 2-17 は次のようになります。

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x2(0) \\ x2(1) \end{bmatrix} \quad \text{式 2-21}$$

$$\begin{bmatrix} X(2) \\ X(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x2(2) \\ x2(3) \end{bmatrix} \quad \text{式 2-21}$$

$$\begin{bmatrix} X(1) \\ X(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x2(4) \\ x2(5) \end{bmatrix} \quad \text{式 2-21}$$

$$\begin{bmatrix} X(3) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x2(6) \\ x2(7) \end{bmatrix} \quad \text{式 2-21}$$

式 2-21 から式 2-21 は N=2 の離散フーリエ変換を 4 回計算することで N=8 の離散フーリエ変換を実現できることを表しています。又、これらの式は足し算と引き算で計算できるので、最終的に次のようになります。

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \\ X(1) \\ X(5) \\ X(3) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x2(0) + x2(1) \\ x2(0) - x2(1) \\ x2(2) + x2(3) \\ x2(2) - x2(3) \\ x2(4) + x2(5) \\ x2(4) - x2(5) \\ x2(6) + x2(7) \\ x2(6) - x2(7) \end{bmatrix}$$

以上のアルゴリズムのダイアグラムを図 2-3 に示します。

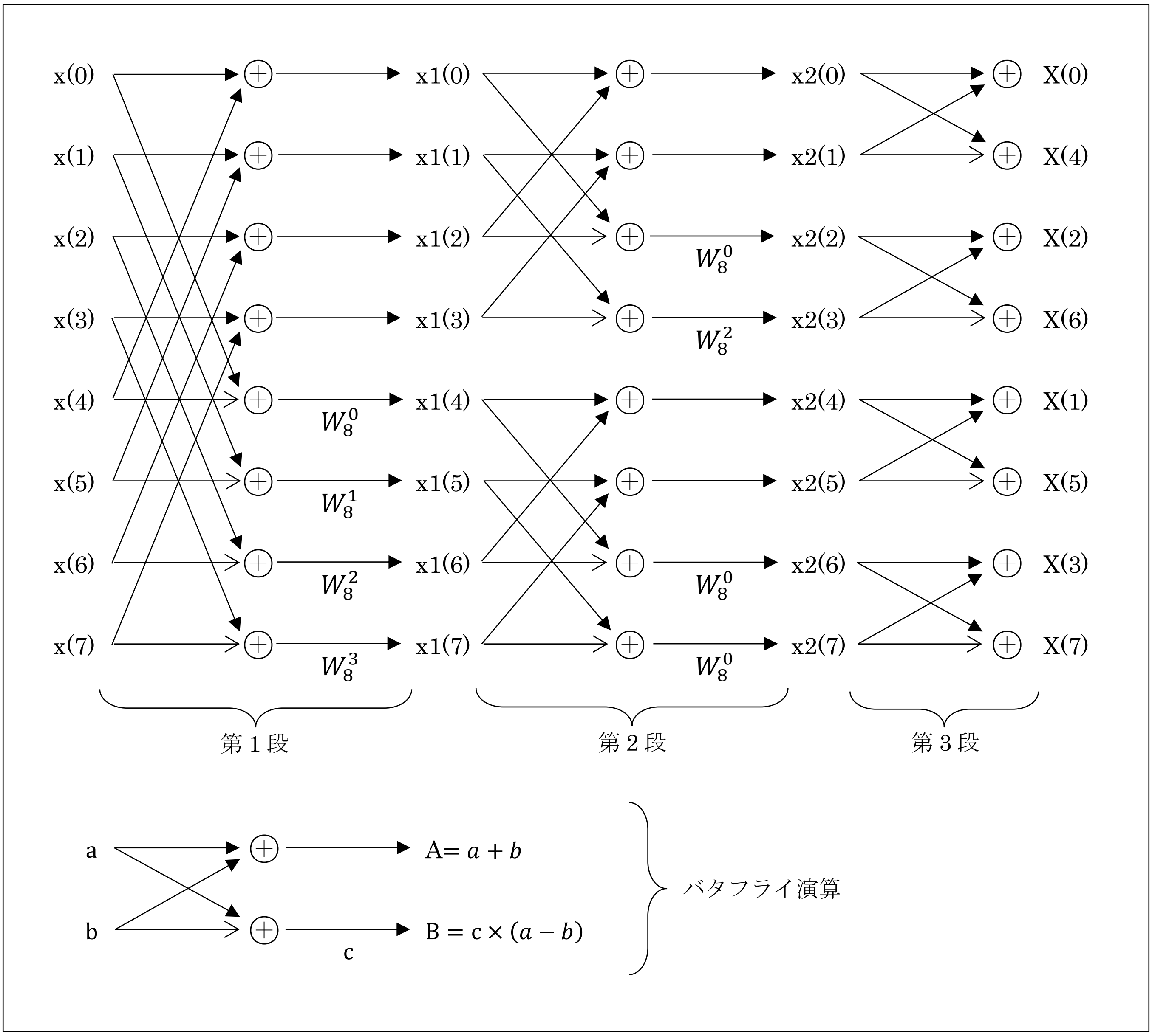


**図 2-3 N=8 の高速フーリエ変換のダイアグラム**

N サンプルの離散フーリエ変換に必要な演算は、$N^2$回の乗算とN $(N-1)$回の加算が必要ですが、高速フーリエ変換アルゴリズムは、$(N/2)(log_2 N-1)$回の乗算と$N\ log_2 N$回の加算で同じ結果が得られます。（但し、結果を格納する配列のインデックスが昇順ではないため、間接アドレッシング、又は、並び替えが必要になります。）

例　N=1024 の場合

離散フーリエ変換　　1,048,576 回の乗算と 1,047,552 回の加算処理になります。

高速フーリエ変換　　$(1024/2)(log_2 1024-1)=512\times(10-1)=4{,}608$回の乗算と、

$1024\times log_2 1024$ =10,240 回の加算処理になります。

## 3. 特記事項

資料の内容に間違いがないように努めていますが、完全に内容を保証することはできません。間違いにお気付きの場合は、admin@robobiox.com までメール頂ければ幸いです。

| 改定履歴 | 改　　　定　　　内　　　容 | 検認 | 照査 | 作成 |
|---|---|---|---|---|
| 初期作成<br>15/7/30 | | ― | ― | 市来 博記 |
| | | | | |